

Aalto-yliopisto  
Perustieteiden korkeakoulu  
Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelma

Jouko Lehtomäki

# Logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä

Diplomityö  
Espoo, 11. elokuuta, 2015

Työn valvoja ja ohjaaja: Dos. Kirsi Peltonen

Aalto-yliopisto  
Perustieteiden korkeakoulu  
Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelma

DIPLOMITYÖN  
TIIVISTELMÄ

<b>Tekijä:</b>	Jouko Lehtomäki		
<b>Työn nimi:</b>	Logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä		
<b>Päiväys:</b>	11. elokuuta, 2015	<b>Sivumäärä:</b>	44
<b>Pääaine:</b>	Matematiikka	<b>Koodi:</b>	Mat-1
<b>Työn valvoja ja ohjaaja:</b>	Dos. Kirsi Peltonen		
Työssä esitellään kaksiulotteinen kompleksinen hyperbolinen avaruus ja sen reunalla oleva Heisenbergin ryhmä. Työn tarkoituksena on hyperbolisten pakkojen määrittely kompleksiseen hyperboliseen avaruuteen ja Heisenbergin ryhmän logaritmisten koordinaattien johtaminen pakkojen avulla. Pakkoja ja logaritmisiä koordinaatteja sovelletaan Heisenbergin ryhmässä kontaktikuvausten rakentamiseen. Nämä kontaktikuvaukset ovat yhteydessä Heisenbergin ryhmän kvasikonformikuvauksiin.			
<b>Asiasanat:</b>	Kompleksinen hyperbolinen avaruus, Heisenbergin ryhmä, hyperboliset pakat, kontaktikuvaus, kvasikonformikuvaus		
<b>Kieli:</b>	suomi		

Aalto University  
School of Science  
Degree Programme in Engineering Physics

ABSTRACT OF  
MASTER'S THESIS

<b>Author:</b>	Jouko Lehtomäki		
<b>Title:</b>	Logarithmic coordinates in Heisenberg group		
<b>Date:</b>	August 11, 2015	<b>Pages:</b>	44
<b>Major:</b>	Mathematics	<b>Code:</b>	Mat-1
<b>Supervisor:</b>	Doc. Kirsi Peltonen		
This thesis presents two dimensional complex hyperbolic space and its boundary which contains the Heisenberg group. The goal of this work is to define hyperbolic packs in the complex hyperbolic space and use these packs to define logarithmic coordinates in the Heisenberg group. The packs and the logarithmic coordinates are applied in the Heisenberg group to build contact mappings. These contact mappings are in close relation with quasiconformal mappings of the Heisenberg group.			
<b>Keywords:</b>	Complex hyperbolic space, Heisenberg group, hyperbolic packs, contact mapping, quasiconformal mapping		
<b>Language:</b>	Finnish		

# Kiitokset

Diplomityö on päätös eräälle elämäni ajanjaksolle, joten lyhyet kiitokset lie-  
nevät tässä vaiheessa paikallaan.

Suurimmat kiitokset kuuluvat ohjaajalleni Kirsi Peltoselle, joka esitteli  
tämän aiheen minulle ja vei sen kanssani loppuun asti. Hänen ohjauksen-  
sa ansioista törmäsin opiskeluaikani useihin matematiikan alueisiin, joita  
olisin tuskin muuten löytänyt.

Kiitokset myös matematiikan ja systeemianalyysin laitokselle, joka tarjosi  
miellyttävän työympäristön. Erityisesti työhuonetoiverini tarjosivat henkistä  
virkistystä arjen aherruksen keskellä.

Haluan kiittää kaikkia ystäviäni, jotka ovat viettäneet aikaa kanssani  
ja näin tehneet elämästäni rikkaampaa. Erityisesti ystäväni #e\_e-kanavalla  
tekivät opiskelujastani nautittavan sekä opiskellessa että vapaa-ajalla.

Lopuksi kiitokset vanhemmilleni, jotka ovat tukeneet minua alusta asti  
ja mahdollistivat tämän kaiken.

Espoo, 11. elokuuta, 2015

Jouko Lehtomäki

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kompleksinen hyperbolinen avaruus</b>	<b>4</b>
2.1	Hermiittinen muoto ja projektiivinen avaruus . . . . .	4
2.2	Kuulamalli ja Siegelin alue . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Isometriat</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Aliavaruudet</b>	<b>14</b>
4.1	Kompleksiset suorat . . . . .	15
4.2	Täysin reaaliset Lagrangen tasot . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Heisenbergin ryhmä</b>	<b>19</b>
5.1	Yhdenmuotoisuuskuvaukset . . . . .	20
5.2	Vektorikentät . . . . .	21
5.3	Kontaktikuvaukset . . . . .	22
5.4	Aliavaruuksien reunat . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Hyperboliset pakat</b>	<b>25</b>
6.1	Pakkojen konstruktio . . . . .	25
6.2	Pakkojen käytös isometrisissa kuvauksissa . . . . .	31
6.3	Pakkakoordinaatit . . . . .	32
6.4	Roottorikuvaus . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä</b>	<b>36</b>
7.1	Logaritmisten koordinaattien ominaisuuksia . . . . .	37
7.2	Kontaktikuvaukset logaritmisissa koordinaateissa . . . . .	40
7.3	Roottorikuvaus kontaktikuvauksena . . . . .	41
7.4	Radiaalinen venytys . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>43</b>

# Luku 1

## Johdanto

Heisenbergin ryhmä on aktiivisen tutkimuksen aihe, joka on monen matemaatiikan alueen leikkauksessa. Eräs kiinnostava aspekti on geometrian ja analyysin kohtaaminen Heisenbergin ryhmän kvasikonformikuvauksissa. Kvasikonformikuvaukset voidaan määritellä yleisesti metrisissä avaruuksissa, mutta geometrisesti konkreettisempaa kosketuspintaa näihin kuvauksiin Heisenbergin ryhmässä tuo Korányin ja Reimannin merkittävä paperi [1], joka yhdistää kvasikonformikuvaukset Heisenbergin ryhmän kontaktirakenteeseen.

Kvasikonformikuvaukset ovat merkittävässä asemassa Heisenbergin ryhmän tutkimuksessa, mutta niiden eksplisiittinen rakentaminen on jossain määrin ongelmallista. Artikkel [2] antaa erään tavan lähestyä tätä ongelmaa Heisenbergin ryhmän logaritmistien koordinaattien avulla. Nämä koordinaatit antavat Heisenbergin ryhmän kontaktimuodolle yksinkertaisen lausekkeen, joka mahdollistaa hankalienkin kuvausten eksplisiittisen rakentamisen ja mahdollistaa täten myös kvasikonformikuvausten rakentamisen.

Tämän työn tarkoituksena on rakentaa logaritmiset koordinaatit geometrisista lähtökohdista ja näyttää niiden soveltuvuus kontaktikuvausten rakentamiseen. Geometriset lähtökohdat ovat tässä työssä kompleksinen hyperbolinen avaruus, jonka reunalla on Heisenbergin ryhmän rakenne. Kompleksiin hyperboliseen avaruuteen määritellään koordinaatit, joissa työssä esiteltävät hyperboliset pakat saavat mahdollisimman yksinkertaisen esitystavan. Nämä koordinaatit laajentuvat myös reunalle Heisenbergin ryhmään ja ovat halutut logaritmiset koordinaatit.

Toinen ja kolmas luku esittelevät kompleksisen hyperbolisen avaruuden perusteet: mallit ja isometriat. Kompleksisen hyperbolisen avaruuden konstruktio on analoginen reaalisesta hyperbolisesta avaruudesta ja tämä näkyykin siten, että monella reaalisesta hyperbolisesta avaruudesta tuloksella on vastaava tulos kompleksisessä avaruudessa. Hyperboliselle avaruudelle annetaan kolme mallia: projektiivinen malli, kuulumallin ja Siegelin alue. Näistä tärkein

tässä työssä on Siegelin alue, sillä sen reunalta löytyy Heisenbergin ryhmä. Tärkeimpiä tuloksia Heisenbergin ryhmän kannalta on hyperbolisen avaruuden reunapisteen isotropiaryhmän hajotelma, joka tunnetaan kirjallisuudessa Bruhat-hajotelmana [1].

Neljäs luku esittelee kompleksisen hyperbolisen avaruuden aliavaruudet. Nämä eroavat suuresti reaalista hyperbolisesta avaruudesta. Reaalisessa hyperbolisessa avaruudessa kaikki kahden reaaliulottuvuuden aliavaruudet ovat isometrisiä, kun taas kompleksisesta hyperbolisesta avaruudesta löytyy kahdenlaisia kaksiulotteisia aliavaruuksia: kompleksisia ja täysin reaalisia aliavaruuksia, jotka eivät ole keskenään isometrisiä. Tämä aiheuttaa käytännössä sen, että reaalisen hyperbolisen avaruuden leikkauskaarevuus on vakio ja kompleksisen hyperbolisen avaruuden leikkauskaarevuus on välillä  $-1 \leq \kappa \leq -1/4$  [3]. Hyperbolisten pakkojen kannalta keskeisiä aliavaruuksia ovat täysin reaaliset, joten ne käydään läpi huomattavasti tarkemmin kuin kompleksiset aliavaruudet.

Heisenbergin ryhmä kompleksisen hyperbolisen avaruuden reunana esitellään luvussa viisi. Kompleksisen hyperbolisen avaruuden isometrioiden toiminnosta reunalle saadaan Heisenbergin yhdenmuotoisuuskuvaukset. Heisenbergin ryhmälle annetaan myös sen kontaktirakenne.

Hyperboliset pakat [4] rakennetaan kompleksisen hyperbolisen avaruuden isometrioiden luokittelun ja täysin reaalisten tasojen avulla luvussa kuusi. Samalla rakennetaan hyperbolisille pakoille sovitettut koordinaatit ja tarkastellaan milloin pakat ovat isometrisiä. Pakat ovat mielenkiintoinen esimerkki siitä kuinka kompleksisessa hyperbolisessa avaruudessa on uusia rakenteita suhteessa reaaliseen hyperboliseen avaruuteen.

Seitsemännessä luvussa määritellään edellisen luvun pakoille sovitettujen koordinaattien avulla logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmään ja tutkitaan niiden ominaisuuksia. Luvussa rakennetaan radiaalista venytystä muistuttava kuvaus siten, että se on kontaktikuvaus.

Kompleksisen hyperbolisen avaruuden käsittelyssä on lähteinä käytetty Goldmania [3], joka on aiheen standardireferenssi, sekä Parkerin luentomui-  
tiinpanoja [5], jotka antavat hiukan laskennallisemmän lähestymistavan. Heisenbergin ryhmän pääasiallisena lähteenä on toiminut Korányi-Reimannin paperi [1].

## Luku 2

# Kompleksinen hyperbolinen avaruus

Määritellään hermiittinen muoto ja sen kautta kaksiulotteinen kompleksinen hyperbolinen avaruus  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Konstruktiot toimivat  $n$ -ulotteiselle kompleksisella hyperboliselle avaruudelle, mutta konkreettisuuden vuoksi keskitytään kaksiulotteiseen tapaukseen.

Kompleksinen hyperbolinen avaruus määritellään kompleksisen projekttiivisen avaruuden aliavaruutena ja sille rakennetaan malleja tässä kappaleessa. Seuraamme Parkerin merkintöjä [5] ja merkitsemme vektoriavaruudessa  $\mathbb{C}^2$  olevia pisteitä normaaleilla kirjaimilla  $x, y, z$  ja pisteiden nostoja eli vektoriavaruudessa  $\mathbb{C}^3$  olevia vektoreita lihavilla kirjaimilla  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ . Vektoreiden  $\mathbf{x}, \dots$  komponentteja merkitään alaindekseillä  $x_1, x_2, x_3, \dots$

## 2.1 Hermiittinen muoto ja projektiivinen avaruus

Määritellään vektoriavaruuteen  $\mathbb{C}^3$  hermiittinen muoto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Hermiittinen muoto on kuvaus  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , joka voidaan esittää hermiittisen matriisin  $H$  avulla siten, että muoto voidaan kirjoittaa

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* H \mathbf{x}.$$

Olkoon  $\lambda$  kompleksiluku. Hermiittisellä muodolla on seuraavat ominaisuudet

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{y}^* H (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}^* H \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}^* H \mathbf{x}_2 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle, \\ \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{y}^* H (\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{y}^* H \mathbf{x} = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{y}^* H \mathbf{x} = \mathbf{y}^* H^* \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* H \mathbf{y})^* = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}.\end{aligned}$$



Muotoa sanotaan seskilineaariseksi. Muodolle saadaan heti kaksi tärkeää ominaisuutta

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &\in \mathbb{R}, \\ \langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle &= |\lambda|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.\end{aligned}$$

Hermiittinen muoto voidaan tulkita symmetrisen bilineaarisen muodon yleistyksenä kompleksisiin vektoriavaruuksiin. Tätä ideaa seuraamalla voidaan reaalisen hyperbolisen avaruuden määritelmä laajentaa kompleksiseksi hyperboliseksi avaruudeksi.

Määritellään avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  olevan kompleksinen vektoriavaruus  $\mathbb{C}^3$ , joka on varustettu hermiittisellä muodolla  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  siten, että muotoa vastaavalla hermiittisellä matriisilla on kaksi positiivista ja yksi negatiivinen ominaisarvo. Tällaista hermiittistä matriisia kutsutaan tyyppin  $(2, 1)$  matriisiksi. Tässä työssä hermiittisille muodolla tarkoitetaan aina muotoa, joka voidaan kirjoittaa tyyppin  $(2, 1)$  matriisin avulla.

Tällöin vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1}$  kuuluu yhteen seuraavista joukoista

$$\begin{aligned}V_- &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}, \\ V_0 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} - \{0\} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\}, \\ V_+ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0\}.\end{aligned}$$

Vektoria  $\mathbf{x}$  kutsutaan negatiiviseksi, nollaksi tai positiiviseksi riippuen siitä mihin joukkoon  $V_-$ ,  $V_0$ ,  $V_+$  se kuuluu.

Kuten reaalisessa tapauksessa, muodostetaan avaruudesta  $\mathbb{C}^{2,1}$  projekttiivinen avaruus kuvauksella  $\mathbb{P} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} - \{0\} \mapsto [\mathbf{x}] \in \mathbb{CP}^2$ , jossa ekvivalenssiluokan  $[\cdot]$  määrää relaatio  $\sim$ . Vektorit  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  ovat relaatiossa  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  jos ja vain jos on olemassa nollasta eroava kompleksiluku  $\lambda$  siten, että pätee  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ . Selvästi vektori  $\lambda \mathbf{x}$  on negatiivinen jos ja vain jos  $\mathbf{x}$  on negatiivinen. Samoin myös joukoille  $V_0$  ja  $V_+$ . Määritellään kompleksinen hyperbolinen avaruus kuten reaalinen hyperbolinen avaruus.

**Määritelmä 1. *Projektiivinen malli*** kaksiulotteiselle kompleksiselle hyperboliselle avaruudelle on  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}V_-$ , joka on varustettu Bergmanin metriikalla. Projektiivisen mallin reuna on  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}V_0$ .

Tässä ei esitetä tarkempaa konstruktiota hyperbolisesta metriikasta, vaan otetaan suoraan sen määrittävä Bergmanin metriikka käyttöön. Bergmanin metriikan määrittää metrinen tensori [5]

$$ds^2 = -\frac{4}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle & \langle d\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{z}, d\mathbf{z} \rangle & \langle d\mathbf{z}, d\mathbf{z} \rangle \end{pmatrix},$$

jossa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on hermiittinen muoto.

Eri hermiittisten muotojen käytöstä saadaan merkinnällistä etua, kun käytetään eri malleja. Määritellään kaksi tässä työssä tarvittavaa hermiittistä muotoa, jota kutsumme ensimmäiseksi ja toiseksi hermiittiseksi muodoksi. Ensimmäinen hermiittinen muoto määritellään matriisilla, joka on diagonalisoitu versio tyypin  $(2, 1)$  matriisista

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ja toinen hermiittinen muoto määritellään matriisilla

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Kuulamalli ja Siegelin alue

Kaksi muuta standardimallia kompleksiselle hyperboliselle avaruudelle ovat kuulamalli ja Siegelin alue. Molemmat voidaan tulkita projektiivisen avaruuden eri leikkauksina ja täten saadaan eri malleja kompleksiselle hyperboliselle avaruudelle projektiivisestä määritelmästä. Kuulamalli sisältää hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  rajoitettuna joukkona, kun taas Siegelin alue sisältää sen rajoittamattomana joukkona.

Kuulamalli saadaan valitsemalla ensimmäinen hermiittinen muoto ja ottamalla leikkaus  $z_3 = 1$  avaruudessa  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Leikkaus sisältää nyt joukon  $\mathbb{P}V_-$  ja  $\mathbb{P}V_0$  pisteet, sillä jokaisesta ekvivivalenssiluokasta löytyy edustaja, joka leikkaa tasoa  $z = 1$ . Sijoittamalla  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 1)$  ensimmäiseen hermiittiseen muotoon saadaan  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_1 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 1$ , jolloin kompleksiseksi hyperboliseksi avaruudeksi tulee

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}V_- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\}$$

ja sen reunaksi tulee pallo  $\mathbb{S}^3$

$$\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}V_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$$

Tästä tulee kuulamallin nimi eli saadaan upotus

$$\mathbb{A} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{2,1}) \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

joka upottaa kuulan  $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^{2,1}$  kompleksiseksi hyperboliseksi avaruudeksi. Kuulan  $\mathbb{B}^2$  keskipiste  $(0, 0)$  siirtyy vektoriksi

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kuulamallimalli voidaan käsittää kompleksisen hyperbolisen avaruuden mallina "sisältäpäin". Kuulamalli on analoginen Poincaré'n kiekkomalliin, joka on yhden kompleksiulettavuuden hyperbolinen avaruus  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

Toinen standardimalli on Siegelin alue. Kirjallisuudessa esiintyy kaksi eri tapaa rakentaa tämä malli ja tässä esitellään molemmat tavat. Ensimmäinen tapa on määritellä Siegelin alue ja rakentaa biholomorfinen kuvaus kuulamallin kanssa. Toinen tapa on määritellä sopiva hermiittinen muoto ja ottaa taas sopiva leikkaus avaruudesta  $\mathbb{C}^{2,1}$ , kuten kuulamallia rakentaessa.

Toinen hermiittinen muoto antaa merkinnällistä etua siten, että voidaan määritellä Siegelin alue leikkauksena  $z_3 = 1$  avaruudessa  $\mathbb{C}^{2,1}$  kanssa samoin kuin kuulamallissa. Olkoon  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, 1)$  standardinosto avaruudesta  $\mathbb{C}^2$  avaruuteen  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Tästä saadaan toisella hermiittiselle muodolle lauseke

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2 = y_1 + y_2 \overline{y_2} + \overline{y_1}.$$

Täten kompleksinen hyperbolinen avaruus on nyt muotoa

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid 2\operatorname{Re}(y_1) + |y_2|^2 < 0 \}$$

ja sen reuna on

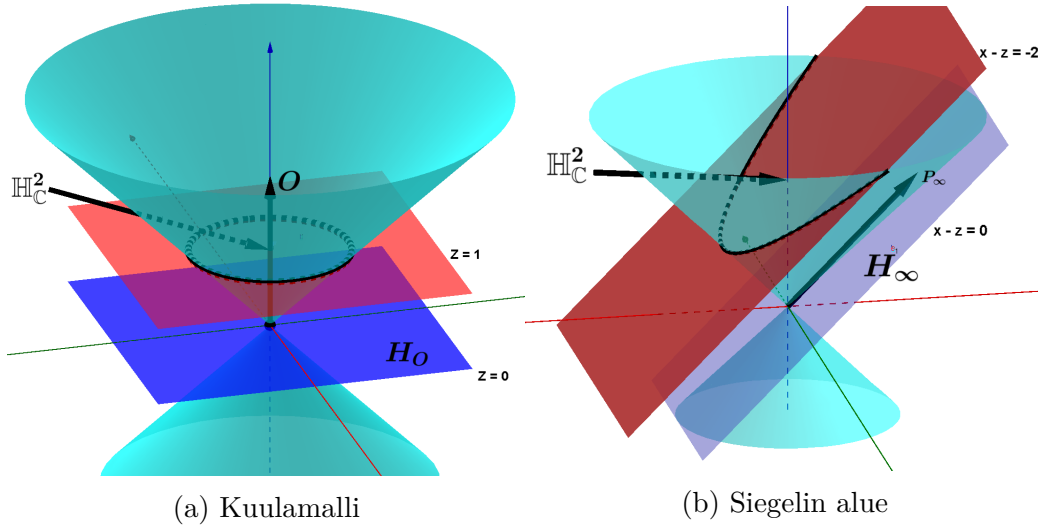
$$\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid 2\operatorname{Re}(y_1) + |y_2|^2 = 0 \}.$$

Yksi reunapiste jää saavuttamatta: piste  $p_{\infty} = (1, 0, 0)$ . Reunaa on siis euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^3$  yhden pisteen kompaktifointi.

On syytä huomata, että Siegelin alue voidaan valita usealla eri tavalla. Siegelin alueeksi on valittu sama paraboloidi kuin Parkerilla [5], kun taas esimerkiksi Goldman [3] on valinnut hiukan eri tavalla kierretyn paraboloidin.

Eri hermiittisten muotojen välillä on muunnokset, joita kutsutaan Cayleyn muunnoksiksi. Jos hermiittinen muoto  $H$  on tiedossa, niin Cayleyn muunnos kuulamalliin  $H_1$  on helppo rakentaa. Tehdään muodolle  $H$  ominaisarvohajotelma  $V^{-1}DV$ , jolloin diagonaalimatriisi  $D$  on  $H_1$  ja ominaisvektoreista muodostettu matriisi  $V$  on haluttu Cayleyn muunnos.

Valitaan ensimmäinen hermiittinen muoto ja tarkastellaan aluksi miten kuulamalli voidaan rakentaa toisella tavalla ja laajennetaan tämä Siegelin alueeseen. Tätä havainnollistaa kuva 2.1, jossa kartio on joukko  $V_0$  ja sen



Kuva 2.1: Kuulamalli ja Siegelin alue havainnollistettuna avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  eri leikkauksina.

sisäpuoli on joukko  $V_-$ . Poistetaan avaruudesta  $\mathbb{C}^{2,1}$  taso  $H_O$ , joka on vektorin  $O$  ortokomplementti hermiittisen muodon suhteen. Tällöin taso  $z = 1$  sisältää kaikki loput vektorit ja täten myös kompleksisen hyperbolisen avaruuden ja sen reunan. Nähdään, että kompleksinen hyperbolinen avaruus on kuula tasossa  $z = 1$ .

Siegelin alue tai paraboloidimalli saadaan vastaavasti. Nyt vektorin  $O$  sijasta valitaan joku reunapiste eli joukkoon  $V_0$  kuuluva vektori  $p_\infty$ . Vektorin  $p_\infty$  ortokomplementti muodosta tason  $H_\infty$ , joka poistetaan avaruudesta ja jäljelle jäävät vektorit saadaan kiinni esimerkiksi tasolla  $x - z = -2$ . Nyt kompleksinen hyperbolinen avaruus löytyy tasolta  $x - z = -2$  rajoittamattomana alueena. Reunapiste  $p_\infty$  on Siegelin mallissa reunan  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  äärettömyyspiste.

Cayleyn muunnos antaa hienon yhteyden näille kahdelle mallille. Cayleyn muunnos kiertää kartiota siten, että Siegelin alue voidaan antaa leikkauksena  $z = 1$ . Muunnos siis siirtää tason  $H_\infty$  tasoksi  $H_O$ . Projisoituna Cayleyn muunnos antaa biholomorfismin kuulamallin  $\mathbb{B}^2$  ja Siegelin alueen  $\mathfrak{H}^2$  välille.

Diagonalisointi hermiittiselle muodolle  $H_2$  antaa normalisoiduksi Cayleyn muunnokseksi

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Tällöin Siegelin alueen upotus voidaan kuvata ensimmäisessä hermiittisessä

muodossa seuraavan upotuksen avulla

$$\mathbb{B} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathfrak{H}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{2,1}) - H(p_\infty) \quad (2.4)$$

$$y \mapsto C \circ \mathbb{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

josta projisoimalla saadaan biholomorfiset lausekkeet kuulamallin ja Siegelin alueen välille

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 + 1}{y_1 - 1} \\ x_2 &= \frac{y_2}{y_1 - 1}, \end{aligned}$$

jossa  $x$  kuuluu kuulamalliin  $\mathbb{B}^2$  ja  $y$  kuuluu Siegelin alueeseen  $\mathfrak{H}^2$ . Työssä käytämme normaalisti toista hermiittistä muotoa, jotta Siegelin alueelle pätee  $z_3 = 1$ . Viemme homogeeniset koordinaatit aina standardimuotoon tarvittaessa projisoimalla

$$\mathbb{P} : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1/z_3 \\ z_2/z_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_3 \neq 0.$$

Kirjallisuudessa esiintyy erilaisia valintoja Siegelin alueeksi. Pääasiallisina lähteinä toimivat Parker [5] ja Goldmann [3]. Tässä työssä käytetään Parkerin versiota Siegelin alueesta, jolloin tämän työn Siegelin alueen ja Goldmannissa käytetyn Siegelin alueen välillä on kuvaus

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joka on peilaus kompleksisen suoran  $(0, 0, \lambda)$  suhteen. Eli Goldmanin esittämät Siegelin alueen kuvaukset saadaan siirrettyä tässä käytettyyn normalisaatioon konjugoimalla kuvauksella  $R$  ja kääntäen.

## Luku 3

# Isometriat

Esitellään aluksi projektiivinen unitaariryhmä  $PU(2, 1)$  ja sen kolminkertainen peite  $SU(2, 1)$ . Ryhmä  $PU(2, 1)$  ja kompleksikonjugaatio muodostavat kompleksisen hyperbolisen avaruuden isometriaryhmän. Tämän jälkeen käsitellään kuulamalliin ja Siegelin alueeseen liittyvät isotropiaryhmät ja erityisesti reunapisteen isotropiaryhmän hajotelma.

Aloitetaan avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  unitaarisesta ryhmästä  $U(2, 1)$ . Ryhmä siis sisältää kuvaukset, jotka säilyttävät hermiittisen muodon. Olkoon  $A \in U(2, 1)$ . Tällöin pätee

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle.$$

Ryhmän  $U(2, 1)$  kuvaukset toimivat selvästi myös kompleksiseen hyperboliseen avaruuteen  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ja sen reunalle  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Esimerkiksi kuvaus  $e^{i\theta}\mathbb{I}$  on identtinen kuvaus projektiivisessä avaruudessa  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{2,1}$  ja täten myös avaruudessa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Tästä on helppo päätellä kuvausten identifikaatio projektiivisessä avaruudessa: projektiivinen unitaarinen ryhmä on

$$PU(2, 1) = U(2, 1)/U(1),$$

jossa  $U(1)$  identifoidaan matriisien

$$\left\{ e^{i\theta}\mathbb{I} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

kanssa.

Erityinen unitaarinen ryhmä  $SU(2, 1)$  on käytännöllinen ryhmä, joka on kolminkertainen peite projektiiviselle unitaariselle ryhmälle

$$PU(2, 1) = SU(2, 1) / \left\{ \mathbb{I}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\mathbb{I}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\mathbb{I} \right\}.$$

Todistetaan ryhmän  $PU(2, 1)$  toiminnon transitiivisuus avaruudessa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Propositio 2.** *Mille tahansa pisteelle  $x \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  on olemassa projektiivinen unitaarinen kuvaus siten, että kuvaus vie origon o pisteeseen  $x$ .*

*Todistus.* Käytetään kuulamallia. Otetaan pisteen  $x$  nosto  $\mathbf{x}$  ja normalisoidaan  $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}}$ . Valitaan mikä tahansa avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  kanta, joka sisältää vektorin  $\mathbf{x}$ . Signatuurille  $(2, 1)$  yhteensopivalla Gram-Schmidt-menetelmällä saadaan kanta  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}\}$ , jossa kaikki vektorit ovat ortogonaalisia hermiittisen muodon suhteen ja pätee  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1$ . Muodostetaan matriisi  $A$  siten, että sen sarakkeet ovat  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}\}$ , jolloin pätee

$$A^* H_1 A = H_1 \quad \text{ja} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x},$$

jossa  $(0, 0, 1)$  on origon nosto. □

Todistetaan ryhmän  $PU(2, 1)$  olevan kaksoistransiitivinen reunalla  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Tähän tarvitaan hermiittistä ristituloa. Käytetään toista hermiittistä muotoa. Vektoreille  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  hermiittisen muodon suhteen ortogonaalinen vektori saadaan lausekkeella

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_3 \\ \bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{x}_3 \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Vektorille  $\mathbf{n}$  saadaan

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2.$$

Cayleyn muunnoksen kautta ristitulo on käytettävissä myös muilla hermiittisillä muodoilla.

**Propositio 3.** *Mille tahansa pisteparille  $x, y \in \partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  on olemassa kuvaus ryhmässä  $PU(2, 1)$ , joka kuvaa origon o pisteeksi  $x$  ja äärettömyyspisteeseen  $\infty$  pisteeksi  $y$ .*

*Todistus.* Käytetään toista hermiittistä muotoa ja Siegelin aluetta. Otetaan nostot  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$ , jolloin pätee  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ . Normalisoidaan vektorit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Voidaan käyttää hermiittistä ristituloa, jolloin saadaan vektori  $\mathbf{n}$ , jolle pätee  $\langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{n} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{n} \rangle = 0$ . Olkoon  $A$  matriisi, jonka sarakkeet ovat  $\{\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ .

Tällöin pätee

$$A^* H_2 A = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle & \langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle & \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{n} \rangle & \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle & \langle \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle & \langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle & \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_2 \quad (3.1)$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{ja} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{y}}.$$

Eli  $A$  kuuluu projektiiviseen unitaariseen ryhmään ja siirtää reunapisteet kuten vaadittu.  $\square$

Tässä kontekstissa *isotropia-aliryhmä* pisteen suhteen on ryhmän  $PU(2, 1)$  sellainen aliryhmä, joka pitää annetun pisteen paikallaan. Kuulamallissa origon isotropia-aliryhmä  $K \subset SU(2, 1)$  on

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid u \in U(2), \theta \in \mathbb{R}, \det(g) = 1 \right\}.$$

Jos ryhmää  $SU(2, 1)$  tarkastellaan muunnoksina Siegelin alueen reunalla saadaan pisteen  $p_\infty$  isotropia-aliryhmäksi  $MAN$ , jonka osat ovat matriisiaryhmät

$$M = \left\{ m_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$A = \left\{ a_s = \begin{pmatrix} \cosh(s) & 0 & \sinh(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(s) & 0 & \cosh(s) \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \text{ ja}$$

$$N = \left\{ n_{(z,t)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(|z|^2 - it) & -\bar{z} & \frac{1}{2}(|z|^2 - it) \\ z & 1 & -z \\ -\frac{1}{2}(|z|^2 - it) & -\bar{z} & 1 + \frac{1}{2}(|z|^2 - it) \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Neljäs tärkeä kuvaus on inversio  $j$ , joka vaihtaa origon ja äärettömyyspisteen paikkaa

$$j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yllä olevat ryhmät on otettu lähteestä [1] ja ne on esitetty ensimmäisessä hermiittisessä muodossa. Siegelin aluetta käsiteltäessä hermiittinen muoto on eri kuin tässä työssä, mutta se on otettu huomioon konjugoimalla kuvauksella  $R$ .



**Teoreema 4** (MAN-hajotelma). *Erityisen unitaarisen ryhmän  $SU(2, 1)$  aliryhmä  $MAN$  on reunapisteen  $p_\infty$  isotropiaryhmä. Tarkemmin voidaan sanoa, että inversion  $j$  avulla jokainen ryhmän  $g \in SU(2, 1)$  kuvaus voidaan kirjoittaa*

$$g = n_1 j m a n_2,$$

jossa  $n_1, n_2 \in N$ ,  $a \in A$  ja  $m \in M$ .

Tärkeän yhteyden projektiivisen unitaarisen ryhmän ja Bergmanin metriikan välillä antaa seuraava teoreema, jonka todistus löytyy Parkerin luentomuistiinpanoista [5].

**Teoreema 5.** *Kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  isometriaryhmän muodostaa  $PU(2, 1)$  ja kompleksikonjugointi.*

# Luku 4

## Aliavaruudet

Luvussa tutustutaan kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  karakterisoi-  
viin aliavaruuksiin: kompleksisiin suoriin ja täysin reaalisiin tasoihin. Mo-  
lemmilla aliavaruuksilla voidaan folioida kompleksinen hyperbolinen avaruus  
 $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ja niiden leikkauskaarevuus on vakio. Leikkauskaarevuus on normalisoi-  
tu siten, että kompleksisilla suorilla sen arvo on  $-1$  ja reaalilla Lagran-  
gen tasoilla se on  $-1/4$ . Nämä ovat leikkauskaarevuuden ääripäät, joten  
kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  leikkauskaarevuus on rajattu vä-  
lille  $-1 \leq \kappa \leq -1/4$ .

Lähdetään liikkeelle kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  merkittä-  
västä teoreemasta, joka otetaan suoraan Goldmanista [3] ilman todistusta.

**Teoreema 6.** *Olko  $M$  avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  täysin geodeettinen alimonisto (ali-  
monisto, joka sisältää pisteidensä väliset geodeesit). Tällöin pätee yksi seu-  
raavista*

1.  *$M$  on kompleksinen suora ja se on isometrinen Poincarén kiekkomallin  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  kanssa.*
2.  *$M$  on täysin reaalinen Lagrangen taso ja se on isometrinen Klein-  
Beltrami-mallin  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  kanssa.*
3.  *$M$  on geodeesi.*

Tulos näyttää erityisesti sen, että avaruus  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ei sisällä täysin geodeettisia  
3-ulotteisia hyperpintoja. Tämä tulos on innoittanut monia yrittämään mo-  
nitahokkaiden rakentamista kompleksisessa hyperbolisessa avaruudessa, kos-  
ka esimerkiksi reaalissa hyperbolisessa avaruudessa monitahokkaiden reu-  
nat rakennetaan täysin geodeettisista hyperpinnoista. Bisektorit eli kahden  
pisteen määrittelemät puolittajat olivat ensimmäinen tapa rakentaa hyper-  
pintoja. Samassa hengessä Parker ja Plattis rakentavat hyperboliset pakat.

Kompleksisen hyperbolisen avaruuden täysin geodeettiset aliavaruuDET ovat helpoimmin karakterisoitavissa avaruudessa  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Vektoriavaruudessa  $\mathbb{C}^{2,1}$  kompleksiset suorat ja täysin reaaliset Lagrangen tasot saavat karakterisaation vektorialiavaruuksina ja vastaavat kompleksisen hyperbolisen avaruuden alivaruuDET saadaan projisoimalla sellaiset aliavaruuDET, jotka leikkaavat joukkoa  $V_-$ .

Merkitään kompleksista vektoriavaruutta  $E = \mathbb{C}^{2,1}$ , jossa on hermiittinen muoto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vastaavalla tyypillä ja alla olevaa reaalista vektoriavaruutta  $E_{\mathbb{R}}$ , jossa on *kompleksioperaattori*  $\mathbb{J}$ . Kompleksioperaattorin toiminto reaaliseen vektoriavaruuteen vastaa imaginaariyksiköllä kertomista kompleksifikaatiossa  $E$  ja kompleksioperaattorin määritellään olevan kuvaus  $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}$ . Kompleksioperaattorin avulla voidaan antaa karakterisaatio kompleksisille suorille  $L$  ja täysin reaalille tasoille  $\tilde{R}$ . Ensimmäinen avaruus pysyy paikallaan (ei pisteittäin) kompleksioperaattorin toiminnossa  $L = \mathbb{J}(L)$  ja jälkimmäisessä aliavaruus ja sen kuva kompleksioperaattorin toiminnossa ovat erillisiä  $S \cap \mathbb{J}(S) = \{0\}$ .

Kompleksioperaattori ja hermiittinen muoto ovat yhteensopivia [3] eli pätee

$$\operatorname{Im}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) = \operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbb{J}\mathbf{y} \rangle). \quad (4.1)$$

## 4.1 Kompleksiset suorat

Tarkastellaan aliavaruuksia kuulamallissa. Kompleksiset suorat ovat kompleksitasoja  $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ , jotka leikkaavat hyperbolista avaruutta ja ovat täten kiekkoja. Kuulamallissa saadaan helppo määritelmä.

**Määritelmä 7.** *Olkoon  $L$  kompleksinen suora avaruudessa  $\mathbb{C}^2$  siten, että se leikkaa yksikkökuulaa  $\mathbb{B}^2$ . Tällöin suoran  $L$  rajoittuma yksikkökuulaan on kompleksisen hyperbolisen avaruuden kompleksinen suora.*

Kompleksiselle suoralle voidaan antaa kaksi karakterisaatiota: sen määrää kaksi pistettä avaruudessa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tai polaarivektori, joka on ortogonaalinen hermiittisen muodon suhteen kompleksiseen suoraan. Ensimmäisestä esityksestä toiseen päästään helposti avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  hermiittisellä ristitulolla. Polaarivektorin avulla suorat voidaan karakterisoida holomorfinen inversioiden kiintopistejoukkona. Jos  $\mathbf{v}$  on suoran  $L$  polaarivektori, niin  $L$  on vektorin  $\mathbf{v}$  ortogonaalikomplementti hermiittisen muodon suhteen.

## 4.2 Täysin reaaliset Lagrangen tasot

Määritellään täysin reaaliset Lagrangen tasot ja tarkastellaan niiden ominaisuuksia. Näistä käytetään myös lyhennystä Lagrangen taso, jota ei pidä sekoittaa symplektigeometrian Lagrangen tasoihin.

**Määritelmä 8.** *Olkoon  $\tilde{R}$  lineaarinen reaalinen aliavaruus avaruudessa  $\mathbb{C}^{2,1}$  siten, että  $\tilde{R}$  leikkaa negatiivista aliavaruutta  $V_-$ . Aliavaruus  $\tilde{R}$  on täysin reaalinen hermittisen muodon  $H$  suhteen jos  $\tilde{R}$  ja  $\mathbb{J}(\tilde{R})$  ovat ortogonaalisia muodon  $H$  suhteen.*

Koska työssä käsitellään vain kaksiulotteista kompleksista hyperbolista avaruutta, niin keskitytään ainoastaan maksimaalisiin täysin reaalisiin tasoihin. Kaikki työssä esiintyvät reaaliset tasot ovat maksimaalisia. Käytännössä tämä tarkoittaa, että aliavaruuden  $\tilde{R} \subset \mathbb{C}^{2,1}$  reaalinen dimensio on 3.

**Määritelmä 9.** *Täysin reaalinen Lagrangen taso  $R$  avaruudessa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  on täysin reaalisen aliavaruuden  $\tilde{R}$  projektio  $R = [\tilde{R}]$ .*

**Määritelmä 10.** *Antilineaarinen involuutio määritellään olevan kuvaus  $\iota : \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$ , joka on antilineaarinen  $\iota(\mathbb{J}\mathbf{u}) = -\mathbb{J}\iota(\mathbf{u})$ , involuutio  $\iota^2 = \mathbb{I}$  ja yhteensopiva hermiittisen muodon kanssa*

$$\langle \iota(\mathbf{x}), \iota(\mathbf{y}) \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Erityisesti halutaan todistaa

**Propositio 11.** *Lagrangen tasoilla on yksi yhteen vastaavuus antilineaaristen involuutioiden kanssa.*

Näistä määritelmistä saadaan karakterisaatio Lagrangen tasolle hermiittisen muodon avulla.

**Korollari 12.** *Olkoon  $R$  täysin reaalinen Lagrangen taso. Tällöin pätee  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$  kaikille  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tilde{R}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tilde{R}$ , jolloin määritelmän mukaan pätee  $\langle \mathbf{x}, \mathbb{J}\mathbf{y} \rangle = 0$ , josta saadaan yhteensopivuudella (4.1)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbb{J}\mathbf{y} \rangle = \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}.$$

□

Koska hermiittisen muodon imaginaarinen osa  $\text{Im}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  on avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  symplektinen muoto [3], niin täysin reaaliset tasot ovat myös avaruuden  $\mathbb{C}^{2,1}$  symplektisen geometrian Lagrangen tasoja ja ne ovat nimetty tämän mukaisesti.

Lagrangen tasot ovat anti-lineaaristen involuutioiden kiintopistejoukko, joka on tässä työssä kiinnostavin karakterisaatio näille tasoille.

**Propositio 13.** *Jokaista täysin reaalista tasoa vastaa antilineaarinen involuutio, jonka kiintopistejoukko reaalinen taso on.*

*Todistus.* Olkoon  $\tilde{R}$  täysin reaalinen taso. Tällöin pätee  $\tilde{R} \cap \mathbb{J}(\tilde{R})$ . Nyt voidaan kirjoittaa  $\mathbb{C}^{2,1} = \tilde{R} \oplus \mathbb{J}(\tilde{R})$ , jolloin voidaan määritellä kuvaus  $\iota(s \otimes z) = s \otimes \bar{z}$  kompleksifikaation avulla, jossa pätee  $\mathbf{x} = s \otimes z \in \mathbb{C}^{2,1}$  ja  $s \in \tilde{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Nyt  $\iota$  on selvästi anti-lineaarinen involuutio, sillä pätee

$$\langle \iota(\mathbf{x}), \iota(\mathbf{y}) \rangle = \langle \iota(s_1 \otimes z_1), \iota(s_2 \otimes z_2) \rangle = \langle s_1 \otimes \bar{z}_1, s_2 \otimes \bar{z}_2 \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Todistetaan toinen suunta. Olkoon  $\iota$  anti-lineaarinen involuutio. Involuutiolla  $\iota^2 = \mathbb{I}$  on kaksi ominaisavaruutta  $\tilde{R}_\iota^+$  ja  $\tilde{R}_\iota^-$ , jotka vastaavat ominaisarvoja  $+1$  ja  $-1$ . Eli saadaan hajotelma  $\mathbb{C}^{2,1} = \tilde{R}_\iota^+ \oplus \tilde{R}_\iota^-$ , jossa aliavaruus  $\tilde{R}_\iota^+ = \{u \in E_{\mathbb{R}} | \iota(u) = u\}$  on involuution kiintopistejoukko. Todistetaan, että se on myös reaalinen taso.

Olkoon vektorit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tilde{R}_\iota^+$ . Riittää näyttää, että pätee

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Tämä seuraa suoraan anti-involuution määritelmästä

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \iota(\mathbf{x}), \iota(\mathbf{y}) \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Saadaan siis vastaavuus täysin reaalisten tasojen ja antilineaaristen involuutioiden kiintopistejoukkojen välille, joka todistaa väitteen.  $\square$

Täysin reaaliset tasot ja vastaavat involuutiot käyttäyvät hyvin myös projektiossa. Todistus sivuutetaan, mutta se löytyy Goldmanista [3].

**Lemma 14.** *Olkoon  $\tilde{R}$  ja  $\tilde{R}'$  täysin reaalisia tasoja ja  $\iota, \iota'$  vastaavia anti-involuutioita. Tällöin täysin reaaliset tasot ovat projektiivisesti ekvivalentteja jos ja vain jos involuutiot  $\iota$  ja  $\iota'$  ovat.*

Propositio 11 seuraa propositiosta 13 ja lemmasta 14.

**Propositio 15.** *Ryhmän  $SU(2,1)$  alkiot toimivat transitiivisesti Lagrangen tasoille.*

*Todistus.* Lagrangen taso vastaa maksimaalista täysin reaalista tasoa  $\tilde{R}$ . Tasolle voidaan valita ortonormaali kanta  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  siten, että pätee

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}_i, \mathbb{J} \mathbf{x}_j \rangle = \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Nyt on olemassa yksikäsitteinen unitaarinen kuvaus, joka vie avaruuden  $\mathbb{C}^3$  standardikannan  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  kannaksi  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ . Tämä kuvaus kuuluu ryhmään  $SU(2, 1)$ .  $\square$

**Esimerkki 1.** *Proposition 13 todistuksesta saadaan malli antilineaarille involuutiolle: kompleksikonjugaatio  $z \mapsto \bar{z}$ , jota vastaava Lagrangen taso on*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0 \right\}.$$

*Tämä toteuttaa selvästi myös ehdon  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$  kaikilla vektoreilla  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$ , jotka kuuluvat Lagrangen tasolle  $R$ , kuten yllä todistettiin*

Proposition 15 avulla saadaan myös, että kaikki anti-involuutiot saadaan konjugoimalla kompleksikonjugaatiota ryhmän  $SU(2, 1)$  alkiolla.

Työssä antilineaarisesta involuutiosta käytetään nimeä *inversio* kirjallisuudessa esiintyvän tavan mukaisesti. Kirjallisuudessa käytetään myös joskus nimeä anti-inversio jos halutaan tehdä ero holomorfinen ja antiholomorfinen inversioiden välille.

Nähdään kompleksisten suorien ja täysin reaalisten Lagrangen tasojen duaalisuus: Suorat määräytyvät holomorfinen involuutioista, kun taas Lagrangen tasot määräytyvät antiholomorfinen involuutioista.

## Luku 5

# Heisenbergin ryhmä

Luvun 3 teoreeman 4 hajotelmaa käyttämällä osoitamme, että kompleksisen hyperbolisen avaruuden reunalla on Heisenbergin ryhmän rakenne. Käsittelemme lyhyesti sen ominaisuuksia, joista erityisesti keskitymme hajotelman indusoimiin Heisenbergin yhdenmuotoisuusmuunnoksiin ja kontaktikuvauksiin.

Näytetään, että ryhmän  $N$  kuvaukset  $n_{(z,t)}$  muodostavat Heisenbergin ryhmän ja lasketaan Heisenbergin ryhmäoperaation antama parametrisaatio reunapisteille  $n_{(z,t)}$ . Teoreeman 4 ryhmät on annettu Siegelin alueessa ensimmäisessä hermiittisessä muodossa. Käytetään toista hermiittistä muotoa ja konjugoidaan matriisiryhmä  $N$  Cayleyn kuvaukselle  $C$ , jolloin tulokseksi saadaan yläkolmiomatriisi

$$\tilde{n}_{z,t} = C^* \cdot n_{(z,t)} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\bar{z} & -|z|^2 + it \\ 0 & 1 & \sqrt{2}z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yläkolmiomatriisit muodostavat Heisenbergin ryhmän [6]. Lasketaan vielä ryhmäoperaatio

$$\begin{aligned} (z', t')(z, t) &= \tilde{n}_{(z',t')} \tilde{n}_{(z,t)} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}(\bar{z}' + \bar{z}) & -|z + z'|^2 + it + it' + 2\operatorname{Im}(z'\bar{z}) \\ 0 & 1 & \sqrt{2}(z' + z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (z' + z, t + t' + 2\operatorname{Im}(z'\bar{z})). \end{aligned}$$

Ryhmä  $N$  toimii transitiivisesti reunalle  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{p_{\infty}\}$ , joten reunapisteen parametrisaatio saadaan siirtämällä origo. Määritellään tämä myös Heisenbergin ryhmän identiteettialkioksi, jolloin Siegelin alueen reuna samaistetaan

Heisenbergin ryhmän kanssa ja reunapisteen parametrisaatio on

$$(z, t)(0, 0) = \tilde{n}_{(z, t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|z|^2 + it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Määritellään Heisenbergin ryhmään normi

$$\|(z, t)\| = (|z|^4 + t^2)^{1/4},$$

jonka indusoima metriikka on ekvivalentti Heisenbergin ryhmän polkumetriikan kanssa [6]. Etäisyys Heisenbergin ryhmässä voidaan kirjoittaa ryhmäoperaation avulla

$$d((z, t), (z', t')) = |(z, t)^{-1}(z', t')|$$

## 5.1 Yhdenmuotoisuuskuvaukset

Tutkitaan erityisen unitaarisen ryhmän  $SU(2, 1)$  kuvauksia Heisenbergin ryhmässä teoreeman 4 hajotelman avulla. Kuvaukset on konjugoitu Cayleyn muunnoksella kuten Heisenbergin ryhmäoperaatiota laskettaessa.

Aliryhmälle  $A$  saadaan kuvaus

$$\begin{aligned} \tilde{a}_s(z, t) &= \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z|^2 - it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s}(|z|^2 - it) \\ \sqrt{2}z \\ e^s \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\mathbb{P}}{=} \begin{pmatrix} e^{-2s}(|z|^2 - it) \\ e^{-s}\sqrt{2}z \\ 1 \end{pmatrix} = (e^{-s}z, e^{-2s}t), \end{aligned}$$

joka on dilaatio

$$\|\tilde{a}_s(z, t)\| = e^{-s}\|(z, t)\|.$$

Vastaavasti aliryhmälle  $M$  saadaan lauseke

$$m_\theta(z, t) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z|^2 - it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \begin{pmatrix} |z|^2 - it \\ \sqrt{2}e^{-i\theta}z \\ 1 \end{pmatrix} = (e^{-i\theta}z, t),$$



joka on kierto tasossa. Jäljellä on enää inversio  $j$ , joka on reunalla kuvaus

$$\begin{aligned}\tilde{j}(z, t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z|^2 - it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{|z|^2 - it} \\ \sqrt{2}\frac{z}{|z|^2 - it} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-|z|^2 - it}{|z|^4 + t^2} \\ \sqrt{2}\frac{z}{|z|^2 - it} \\ 1 \end{pmatrix} = \left( \frac{z}{|z|^2 - it}, \frac{-t}{|z|^4 + t^2} \right).\end{aligned}$$

Tämä jättää Heisenbergin yksikköpallon  $\|(z, t)\| = 1$  paikalleen ja erityisesti se vaihtaa origon ja äärettömyyspisteen  $\infty$  paikkaa.

## 5.2 Vektorikentät

Vasemmalta invariantit vektorikentät ovat vektorikenttiä, jotka levittävät identiteetti-alkion tangenttiavaruuden ryhmäoperaation avulla koko monistolle. Tällaisilla vektorikentillä saadaan kätevästi kanta tangenttiavaruuteen jokaisessa Lien ryhmän pisteessä, tässä tapauksessa Heisenbergin ryhmässä [7]. Otamme Heisenbergin tangenttiavaruuden kannaksi vasemmalta invariantit vektorikentät. Näille vektorikentille saadaan rangia 1 olevat kommutaatiorelaatiot.

Heisenbergin vasemmalta invariantit vektorikentät voidaan laskea teoreeman 4 ryhmää  $N$  vastaavan Lien algebran kantojen avulla. Tässä otamme ne kuitenkin suoraan Korányin ja Reimannin paperista [1] ottaen huomioon eri normalisoinnin, joka ei tässä tapauksessa vaikuta. Heisenbergin ryhmän parametrit on tässä annettu reaalina eli pätee  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , jolloin vektorikentät ovat

$$\begin{aligned}X &= \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial t}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} - 2x \frac{\partial}{\partial t}, \\ T &= \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

Näistä saadaan ainoaksi nollasta poikkeavaksi kommutaatiorelaatioksi

$$\begin{aligned}[X, Y] &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} - 2x \frac{\partial}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial y} - 2x \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -2x \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( 2y \frac{\partial}{\partial t} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial t} - 2 \frac{\partial}{\partial t} \\ &= -4T.\end{aligned}$$

Relaatiot voidaan esittää myös siten, että  $X$  ja  $Y$  muodostavat kompleksisen vektorikentän, jolloin ne voidaan antaa suoraan parametrien  $z$  ja  $t$  avulla.

### 5.3 Kontaktikuvaukset

Edellisen kohdan vektorikentistä saadaan kanta 1-muodoille. Otamme tarkastelun alle erityiset 1-muodot, joita kutsumme kontaktimuodoiksi ja tämän muodon säilyttävät kuvaukset, joita kutsumme kontaktikuvauksiksi. Esimerkiksi kaikki ryhmän  $SU(2, 1)$  kuvaukset Heisenbergin ryhmässä ovat kontakteja kuvauksia. Yleisemmin kontaktimuoto on symplektisen muodon yleistys pariton dimensioisille monistoille.

Kontaktimuoto Heisenbergin ryhmässä on 1-muoto siten, että muoto  $d\omega \wedge \omega$  on tilavuusmuoto. Tästä seuraa, että millä tahansa kaikkialla nollasta poikkeavalla skalaarifunktiolla kerrottu kontaktimuoto on myös kontaktimuoto.

Kontakteiksi kuvauksiksi  $f : H \rightarrow H$  sanotaan sellaisia kuvauksia, jotka säilyttävät yllä annetun kontaktimuodon eli  $f$  toteuttaa ehdon

$$f^*\omega = \lambda\omega,$$

jossa  $\lambda$  on jokaisessa pisteessä nollasta eroava skalaarifunktio  $\lambda : H \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f^*$  on kuvauksen  $f$  indusoima kuvaus kotangenttiavaruuksille [7].

Esitellään Heisenbergin ryhmään 1-muoto:

$$\omega = -2ydx + 2xdy + dt. \quad (5.2)$$

Käytämme tätä muotoa standardikontaktimuotona. Kotangenttiavaruuden eli 1-muotojen avaruuden virittää kanta  $\{dx, dy, dt\}$ , joten myös kanta  $\{dx, dy, \omega\}$  virittää 1-muodot. Valitaan standardikannaksi jälkimmäinen, koska siinä esiintyy kontaktimuoto.

Kontaktimuoto virittää erityisen sileän tasokentän tangenttikimppuun siten, että jokainen vektori  $V$  erikoisessa sileässä tasokentässä toteuttaa

$$\langle V, \omega \rangle = 0. \quad (5.3)$$

Tällaista sileää tasokenttää, jonka antaa ainakin lokaalisti kontaktimuoto, sanotaan kontaktistruktuuriksi. Kontaktikuvaus säilyttää myös tämän sileän tasokentän. Vektorikentät  $X$  ja  $Y$  virittävät erityisen sileän tasokentän jokaisessa Heisenbergin ryhmän pisteessä.

Korányin ja Reimannin paperissa [1] todistetaan seuraava yhteys yhdenmuotoisuuskuvauksille ja kontaktikuvauksille.

**Teoreema 16.** *Kaikki ryhmän  $SU(2, 1)$  kuvaukset ovat kontaktikuvauksia Heisenbergin ryhmässä*

## 5.4 Aliavaruuksien reunat

Heisenbergin ryhmä antaa kätevän visuaalisaation kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  aliavaruuksien reunoille. Monesti hyperbolisen avaruuden ja sen aliavaruuksien ominaisuuksien tutkimiseen riittää tarkastelu reunalla. Keskitymme reaalisten Lagrangen tasojen reunojen kuvailuun, sillä niiden ominaisuudet ovat keskeisiä hyperbolisten pakkojen konstruktion kannalta.

Kompleksisten suorien reunoja kutsutaan  $\mathbb{C}$ -ympyröiksi ja reaalisten Lagrangen tasojen reunoja kutsutaan  $\mathbb{R}$ -ympyröiksi. Kompleksisten suorien reunoja kutsutaan kirjallisuudessa myös ketjuiksi ja niitä käsittelee kattavasti esimerkiksi Goldmann [3].

Parametrisoidaan äärelliset  $\mathbb{R}$ -ympyrät. Jokainen  $\mathbb{R}$ -ympyrä vastaa yksikäsitteisesti reaalista Lagrangen tasoa: molemmat ovat saman inversion kiintopisteitä. Lähtökohtaisesti  $\mathbb{R}$ -ympyröitä on kahdenlaisia: äärettömiä ja äärellisiä. Äärettömät ovat äärettömyyspisteen  $\infty$  kautta kulkevia. Standardi ääretön  $\mathbb{R}$ -ympyrä on esimerkin 1 reuna eli kompleksitason reaaliakseli. Toinen luokka on äärelliset  $\mathbb{R}$ -ympyrät.

**Esimerkki 2.** Äärellinen  $\mathbb{R}$ -ympyrä saadaan kuvauksesta, joka ei säilytä äärettömyyspistettä paikallaan. Yksinkertaisin tällainen inversio on

$$\iota : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{z_3} \\ \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \end{pmatrix}.$$

Tämä pitää paikallaan vektorit  $(z, t, \bar{z})$ , jonka projektiota kutsutaan standardiksi Lagrangen tasoksi  $R_{\mathbb{R}}$  ja vastaavaa  $\mathbb{R}$ -ympyrää standardiksi  $\mathbb{R}$ -ympyräksi.

Proposition 15 mukaisesti mikä tahansa  $\mathbb{R}$ -ympyrä voidaan siirtää miksi tahansa toiseksi  $\mathbb{R}$ -ympyräksi sopivalla yhdenmuotoisuuskuvauksella. Nyt voidaan määritellä  $\mathbb{R}$ -ympyrän karakterisoivat kompleksinen säde ja keskipiste.

**Määritelmä 17.** Olkoon  $R$   $\mathbb{R}$ -ympyrä ja  $\iota$  sitä vastaava inversio. Tällöin ympyrän  $R$  keskipiste on äärettömyyspisteen  $\infty$  kuva inversioissa  $\iota$ .

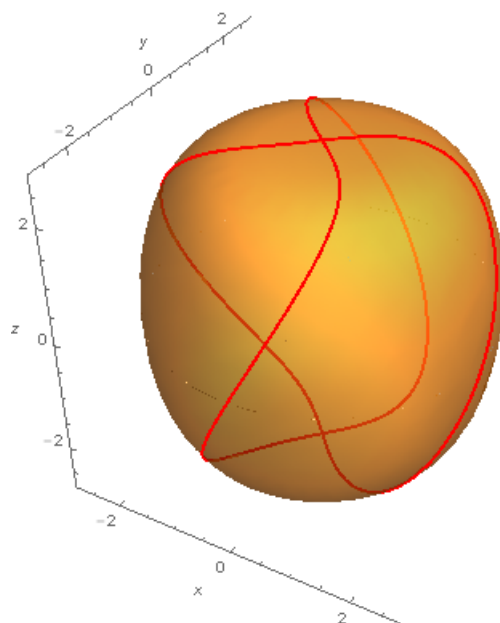
Määritelmän välitön seuraus on se, että  $\mathbb{R}$ -ympyrän keskipiste on ääretön jos ja vain jos ympyrä on ääretön, koska vain ääretön ympyrä sisältää pisteen  $\infty$ . Standardi  $\mathbb{R}$ -ympyrän keskipiste on origossa.

**Määritelmä 18.** Olkoon  $R$  äärellinen  $\mathbb{R}$ -ympyrä. On olemassa Heisenbergin siirto  $n$ , joka siirtää ympyrän  $R$  keskipisteen origoon. Tällöin on olemassa dilaatio

$$\delta : (z, t) \mapsto (re^{i\theta}z, r^2t),$$

siten että  $n(R) = \delta(R_{\mathbb{R}})$ . Tällöin ympyrän  $R$  kompleksinen pituus on  $r^2e^{2i\theta}$ .

Jos  $\mathbb{R}$ -ympyrällä on kompleksinen pituus  $r^2 e^{2i\theta}$ , niin reaalinen pituus Heisenbergin normissa on  $r$  ja jokainen ympyrän piste on etäisyyden  $r$  päässä keskipisteestä. Määritelmät siis täsmäävät nimiensä kantaman Euklidisen intuition kanssa. Tämä riittää karakterisoimaan äärelliset  $\mathbb{R}$ -ympyrät. Myös äärettömät ympyrät voidaan karakterisoida, mutta se tehdään hiukan eri tavalla ja ne eivät olet tässä työssä tärkeitä, joten jätämme ne käsittelemättä. Karakterisaatio ja tarkempaa tietoa löytyy Goldmannista [3].



Kuva 5.1: Havainnollistettu Heisenbergin pallo, jonka pinnalla  $\mathbb{R}$ -ympyröitä.

# Luku 6

## Hyperboliset pakat

Lyhyesti pakkoja voidaan pitää duaalisina bisektoreille [3]. Bisektoreille luonnolliset aliavaruudet ovat kompleksisia suoria, kun taas pakat rakennetaan reaalisten Lagrangen tasojen avulla. Reaaliset Lagrangen taso on helppo karakterisoida vastaavien inversioiden avulla.

Kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  isometriat voidaan luokitella loksodromisiin, elliptisiin ja parabolisiin kuvauksiin [5]. Työssä keskitymme ainoastaan loksodromisiin kuvauksiin, joilla on kaksi kiintopistettä reunalla.

Inversioilla on läheinen yhteys loksodromisiin kuvauksiin, kuten esiteltävästä kuvauksien luokittelusta voi todeta. Loksodromisia kuvauksia on helppo käsitellä Siegelin alueessa ja erityisesti sen reunalla, Heisenbergin ryhmässä. Siegelin alue on siten luonnollisempi malli reaalisten Lagrangian tasojen käsittelyyn ja täten myös pakkojen käsittelyyn. Toinen syy käsittelyyn Siegelin alueessa on Heisenbergin ryhmässä pakkojen avulla saatavat rakenteet. Parker ja Plattis ovat tehneet pakkojen konstruktion myös kuulamallissa [4].

### 6.1 Pakkojen konstruktio

Pakkojen konstruktiossa käytetään kompleksisen hyperbolisen avaruuden  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  kuvausten luokittelua. Hyödynnetään kahta erilaista tapaa luokitella kuvaukset, joiden voidaan karkeasti sanoa olevan algebrallinen luokittelu ja geometrinen luokittelu. Algebrallinen luokittelu nojaa pitkälti hermiittisen muodon ominaisuuksiin ja geometrinen luokittelu voidaan tehdä Lagrangen tasojen inversioiden avulla.

Luokittelun jälkeen rakennetaan loksodromisille kuvauksille yhden parametrin perheitä, joiden avulla saadaan yksi parametriperhe inversiota Lagrangen tasoissa ja täten saadaan parametrisoitua perhe Lagrangen tasoja. Pakat määritellään yhdisteenä yksi parametriperheen Lagrangen tasoista.

Tässä kohti voi tehdä huomion, että loksodromiset kuvaukset saadaan parametrisoitua  $MAN$ -hajotelman ryhmällä  $M$  ja  $A$ . Tämä näkyy helpoiten Heisenbergin koordinaateissa

$$\tilde{a}_s \tilde{m}_\theta(z, t) = (e^{-s-i\theta} z, e^{-2s}), \quad (6.1)$$

jossa kaksi kiintopistettä ovat origo  $o$  ja äärettömyyspiste  $\infty$ . Kaikki muut loksodromiset kuvaukset saadaan konjugoimalla ryhmän  $SU(2, 1)$  kuvauksella eli siirtämällä kiintopisteitä reunalla. Tämä annetaan tarkasti lemmassa 20.

Otetaan tähän vain pakkojen konstruktion kannalta tärkeät osat luokitelusta eli loksodromisten kuvausten karakterisaatiot ja hahmotellaan tämän todistus.

**Teoreema 19.** *Olkoon  $A \in SU(2, 1)$ . Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä*

1. *Kuvaus  $A$  on loksodrominen eli kuvauksella on tasan kaksi kiintopistettä reunalla  $\partial\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ .*
2. *Kuvauksella  $A$  on kaksi nolla-avaruuteen  $V_0$  kuuluvaa ominaisvektoria ominaisarvoilla  $\lambda$  ja  $\bar{\lambda}^{-1}$  siten, että pätee  $|\lambda| \neq 1$ .*
3. *On olemassa inversiot  $\iota_0$  ja  $\iota_1$  pistevieraissa ja ei linkitetyissä Lagrangen tasoissa  $R_0$  ja  $R_1$  siten, että  $A = \iota_1 \circ \iota_0$ .*

*Todistus.* Todistetaan teoreema näyttämällä implikaatioketju

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$$

toteen. Viimeisestä implikaatiosta annetaan vain hahmotelma, koska sen todistaminen vaatisi elliptisten ja parabolisten kuvausten tarkempaa analysointiä, johon ei tässä työssä mennä.

$(1) \Rightarrow (2)$ : Todistus perustuu kolmeen tulokseen. Olkoon  $\lambda$  ja  $\mu$  kuvauksen  $A \in SU(2, 1)$  ominaisarvoja ja vektorit  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  vastaavia ominaisvektoreita. Tällöin pätee

- i Joko pätee  $|\lambda| = 1$  tai pätee  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .
- ii Joko pätee  $\lambda \bar{\mu} = 1$  tai pätee  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ .
- iii Oletetaan  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  ja  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$ . Tällöin pätee joko  $\mathbf{w} = \eta \mathbf{v}$  tai  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ , jossa  $\eta$  on kompleksiluku.

Todistetaan väitteet (i)-(iii) ennen varsinaista tulosta. Ensimmäinen tulos (i) seuraa yhtälöstä

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle,$$

ja toinen tulos (ii) seuraa yhtälöstä

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mu\mathbf{w} \rangle = \lambda\bar{\mu} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Kolmas tulos (iii) seuraa hermiittisen matriisin tyypistä. Käytetään ensimmäistä hermiittistä muotoa standardikannalla  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{w} &= w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Oletetaan  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ , joka on ekvivalentti yhtälön

$$v_1\bar{w}_2 + v_2\bar{w}_2 = v_3\bar{w}_3$$

kanssa. Tällöin kaikille  $\eta \in \mathbb{C}$  pätee

$$\begin{aligned}|v_3 - \eta w_3|^2 &= |v_3|^2 - \eta w_3\bar{v}_3 - \eta v_3\bar{w}_3 + |w_3|^2 \\ &= |v_1|^2 - \eta v_1\bar{w}_1 - \eta w_1\bar{v}_1 + |\eta|^2 |w_1|^2 \\ &\quad + |v_2|^2 - \eta v_2\bar{w}_2 - \eta w_2\bar{v}_2 + |\eta|^2 |w_2|^2 \\ &= |v_1 - \eta w_1|^2 + |v_2 - \eta w_2|^2.\end{aligned}$$

Valitaan  $\eta = v_3/w_3$ , josta seuraa  $\eta = v_1/w_1 = v_2/w_2 = v_3/w_3$ . Nyt pätee  $\mathbf{w} = \eta\mathbf{v}$ .

Oletetaan nyt (1). Selkeästi loksodromisen kuvauksen kiintopisteet vastaavat nolla-avaruuteen kuuluvia ominaisvektoreita. Olkoon  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  kuvauksen  $A$  nolla-avaruuteen kuuluvia ominaisvektoreita ja olkoon  $\lambda$  ja  $\mu$  vastaavia ominaisarvoja. Tuloksen (i) perusteella ominaisarvojen  $\lambda$  ja  $\mu$  pituudet ovat ykkösestä poikkeavia. Kohdan (iii) perusteella pätee  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$  ja tuloksella (ii) saadaan  $\mu = \bar{\lambda}^{-1}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Todistetaan tulos valitsemalla eksplisiittiset  $R_0$  ja  $R_1$ , joiden inversioiden kompositio antaa kuvauksen  $A$ .

Oletetaan (2). Kuvauksen  $A$  kolmanneksi ominaisarvoksi saadaan  $\bar{\lambda}\lambda^{-1}$  ehdosta  $\det(A) = 1$ . Kuvaus  $A$  voidaan diagonalisoida siten, että pätee

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1},$$

jossa  $Q \in SU(2, 1)$ . Matriisin  $Q$  sarakevektorit ovat  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$ , jotka ovat kuvauksen kiintopisteitä. Kolmas sarakevektori on ortogonaalinen näitä vastaan ja saadaan esimerkiksi hermiittisellä ristitulolla. Konstruktio on sama kuin proposition (3.1) todistuksessa.

Täten riittää tarkastella diagonaalimatriisia, joka on loksodrominen kuvaus, jonka kiintopisteet ovat  $o$  ja  $\infty$ . Kuvaukselle  $A$  saadaan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \bar{\lambda}\lambda^{-1} z_2 \\ \bar{\lambda}^{-1} z_3 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \begin{pmatrix} |\lambda|^2 z_1 \\ \lambda z_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

jolloin kuvaus  $A$  on Heisenbergin koordinaateissa  $(z, t) \mapsto (\lambda z, |\lambda|^2 t)$ .

Olkoon  $R_0$  esimerkin 2 Lagrangen taso  $R_{\mathbb{R}}$  ja olkoon taso  $R_1$  tason  $R_0$  kuva kuvauksessa

$$\delta : (z, t) \mapsto (\lambda^{1/2} z, |\lambda| t).$$

Kuvaus  $\delta$  on muotoa (6.1), joten  $R_1$  on Lagrangen taso proposition 15 perusteella.

Nyt Lagrangen tasoa  $R_0$  vastaava inversio  $\iota_0$  ja kuvaus  $\delta$  ovat

$$\iota_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \delta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{1/2} z_1 \\ z_2 \\ \lambda^{-1/2} z_3 \end{pmatrix}.$$

Tällöin Lagrangen tasoa  $R_1$  vastaava kuvaus on

$$\iota_1 = \delta \iota_0 \delta^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \delta \iota_0 \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{-1/2} z_1 \\ z_2 \\ \lambda^{1/2} z_3 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^{1/2} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \lambda^{-1} \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \lambda^{-1} \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Inversioiden kompositiokuvaukseksi saadaan

$$\iota_1 \circ \iota_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \iota_1 \begin{pmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} z_1 \\ z_2 \\ \lambda^{-1} z_3 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{P}}{=} A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

mikä todistaa väitteen.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Hahmotellaan todistus. Todistus on eksluusiotodistus eli suljetaan pois kaikki muut mahdollisuudet. Tähän tarvitaan algebrallinen luokittelu kokonaisuudessaan. Lagrangen tasojen pistevieraus implikoi, että kuvaus  $\iota_1 \circ \iota_0$  ei voi olla parabolinen. Koska tasot eivät ole linkitetyt, niin kuvaus  $\iota_1 \circ \iota_0$  ei voi olla elliptinen. Tästä seuraa, että kuvauksen täytyy olla loksodrominen.  $\square$



Määritellään joukko

$$D = \{\lambda = l + i\theta \in \mathbb{C} : l \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in (-\pi, \pi]\}.$$

Yleisyyttä menettämättä loksodromisen kuvauksen nolla-ominaisvektoreita vastaavien ominaisarvojen voidaan aina valita olevan  $e^\lambda$  ja  $e^{-\bar{\lambda}}$  siten, että pätee  $\lambda \in D$ . Tällöin saadaan kätevästi loksodromisten kuvausten diagonalisointiin liittyvä tulos

**Lemma 20.** *Olko  $A \in SU(2, 1)$  loksodroominen kuvaus ja  $e^\lambda, e^{-\bar{\lambda}}$  sen nolla-ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot, joille pätee  $\lambda \in D$ . Tällöin  $A$  voidaan diagonalisoida*

$$A = Q \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\bar{\lambda}} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

siten, että pätee  $Q \in SU(2, 1)$ .

*Todistus.* Todistus sisältyy teoreeman 19 todistukseen.  $\square$

Rakennetaan yksi parametriperhe loksodromisia kuvauksia. Määritellään matriisi

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in D.$$

Tästä nähdään jo, että lemmassa 20 esitelty diagonaalimatriisi on matriisin  $E(\lambda)$  eksponenttikuvaus. Tästä eksponenttikuvauksesta saadaan haluttu yksi parametriperhe. Tarkasti ottaen seuraava pätee: voidaan laskea aliryhmän  $M$  ja  $A$  virittämä Lien algebra ja todeta, että  $E(\lambda)$  kuuluu tähän. Tällöin eksponenttikuvaus Lien algebrasta Lien ryhmään  $\exp(x \cdot E(\lambda))$  antaa yksi parametriperheen, joka kuuluu edelleen  $M$ :n ja  $A$ :n virittämään aliryhmään eli se on loksodrominen. Tätä tarkkuutta ei kuitenkaan tarvita seuraavan keskeisen teoreeman todistamiseen

**Teoreema 21.** *Olko  $C \in SU(2, 1)$  loksodrominen kuvaus ominaisarvoilla  $e^\lambda, e^{-\bar{\lambda}}$ . Tällöin saadaan perhe loksodromisia kuvauksia  $C^x = Q \exp(x \cdot E(\lambda)) Q^{-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tällöin pätee seuraavat ominaisuudet*

1. *Olko  $\iota_0$  inversio Lagrangen tasossa ja  $R_0$  vastaava Lagrangen taso. Kuvaus  $\iota_x$  määräytyy ehdosta  $C^x = \iota_x \iota_0$ . Kuvaus  $\iota_x$  on tällöin inversio Lagrangen tasossa  $R_x = C^{x/2}(R_0)$ .*

2. Lagrangen tasot  $R_x$  ja  $R_y$  ovat erillisiä jokaisella  $x \neq y$ .

*Todistus.* Lemman 20 mukaan loksodrominen kuvaus voidaan diagonalisoida annetulla tavalla. Matriisi  $\exp(x \cdot E(\lambda))$  on loksodrominen kuvaus kaikilla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , koska se on edelleen muotoa  $E(\lambda)$ . Täten myös  $C^x$  on loksodrominen.

Todistetaan tulos (1). Nyt teoreeman 19 mukaan  $C^x$  voidaan kirjoittaa kahden Lagrangen tason inversion kompositiona. Inversioille pätee  $\iota^2 = \mathbf{1}$ , jolloin saadaan

$$\iota_0 C^x \iota_0 = \iota_0 \iota_x \iota_0 \iota_0 = (\iota_x \iota_0)^{-1} = C^{-x}.$$

Kuvaus  $\iota_x = C^x \iota_0$  on anti-involuutio, koska se on toisen asteen kuvaus

$$(\iota_x)^2 = C^x \iota_0 C^x \iota_0 = C^x C^{-x} = \mathbf{1}$$

ja koska kuvaus  $\iota_0$  on anti-involuutio ja  $C^x$  on lineaarinen. Täten inversio  $\iota_x$  on Lagrangen tason inversio.

Inversio Lagrangen tasossa  $C^{x/2}(R_0)$  on

$$\begin{aligned} C^{x/2} \iota_0 C^{-x/2} &= (\iota_{x/2} \iota_0) \iota_0 (\iota_0 \iota_{x/2}) = \iota_{x/2} \iota_0 \iota_{x/2} \\ &= (\iota_{x/2} \iota_0)^2 \iota_0 = (C^{x/2})^2 \iota_0 = C^x \iota_0 = \iota_x, \end{aligned}$$

joka todistaa, että kuvausta  $\iota_x$  vastaava Lagrangen taso on  $C^{x/2}(R_0)$ .

Todistetaan kohta (2). Olkoon  $C^x = \iota_x \iota_0$  ja  $C^y = \iota_y \iota_0$  siten, että pätee  $x \neq y$ . Nyt pätee

$$\iota_x \iota_y = \iota_x \iota_0 \iota_0 \iota_y = C^x C^{-y} = C^{x-y} \neq \mathbb{I},$$

jossa viimeisessä kohdassa käytettiin hyväksi yksi parametriperheen ominaisuutta. Kuvaus  $C^{x-y}$  on loksodrominen eli Lagrangen tasot  $R_x$  ja  $R_y$  eivät voi olla samat.  $\square$

Merkinnän  $C^x$  käyttö on perusteltua, sillä  $C^x$  antaa saman tuloksen kuin matriisipotenssi, kun  $x$  on kokonaisluku. Nyt voidaan viimein määritellä pakat löydetyn Lagrangen tasoperheen parametrisaatiolla.

**Määritelmä 22.** *Olkoon  $A \in SU(2, 1)$  loksodrominen kuvaus. Tällöin hyperbolinen pakka määritellään*

$$P(C, R_0) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} C^{x/2}(R_0)$$

Pakat ovat vain Lagrangen tasoja, joita on liimattu päällekkäin kuin korttipakka korteista, josta niiden nimikin tulee. Pakka  $P$  on topologisesti kolmiulotteinen kuula, jonka reuna on kaksiulotteinen Heisenbergin ryhmässä. Hyperbolisen avaruuden voi myös jakaa kahteen komponenttiin poistamalla pakan siitä  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 - P$ .

## 6.2 Pakkojen käyttö isometrisissa kuvauksissa

Pakkojen käyttö kompleksisen hyperbolisen avaruuden isometria kuvauksissa on epätriviaali. Tämä on uusi ominaisuus bisektoreihin verrattuna. Pakoille saadaan ominainen roottorikerroin  $\kappa$ , joka rajoittaa pakkojen isometrisyyttä.

**Lemma 23.** *Olkoon  $P(C, R_0)$  pakka. Tällöin pätee seuraavat ominaisuudet.*

1. *Olkoon  $A \in SU(2, 1)$ . Kuvauksen toiminto pakkaan antaa*

$$A(P(C, R_0)) = P(ACA^{-1}, A(R_0)).$$

2. *Pakan loksodromiseen perheeseen kuuluva kuvaus pitää pakan paikallaan*

$$C^x(P(C, R_0)) = P(C, C^x(R_0)) = P(C, R_0).$$

*Todistus.* Ominaisuudet seuraavat suoraviivaisesti pakan määritelmästä  $\square$

Lemman 23 mukaan isometrialla  $A \in SU(2, 1)$  voi siirtää pakan määrittelevän loksodromisen kuvauksen kiintopisteitä, mutta määrittelevän kuvauksen ominaisarvot eivät muutu. Tällöin voidaan nähdä, että loksodromisen kuvauksen ominaisarvot määrittelevät miten isometria käyttäytyy pakkaan. Olkoon  $P(C)$  pakka, jossa kuvauksella  $C$  on ominaisarvo  $e^\lambda$ ,  $\lambda \in D$ . Lukua  $\lambda = l + i\theta$  kutsutaan pakan  $P(C)$  kompleksiseksi pituudeksi.

**Määritelmä 24.** *Olkoon  $P = P(C)$  pakka, jolla on kompleksinen pituus  $\lambda$ .*

1. *Pakan roottorikertoimen  $\kappa = \kappa(P)$  määritellään olevan  $\kappa = \theta/l$ .*
2. *Pakkaa sanotaan tasaiseksi jos sen roottorikerroin on 0.*

Pakan roottori kiteyttää pakkojen isometrisyyden seuraavan tuloksen mukaisesti

**Teoreema 25.** *Jokainen pakka kompleksisella pituudella  $\lambda$  on isometrinen pakkaan  $P(\exp(E(\lambda)), R_{\mathbb{R}})$ . Kaksi pakkaa  $P_1$  ja  $P_2$  roottorikertoimilla  $\kappa_1$  ja  $\kappa_2$  ovat isometriset jos ja vain jos  $\kappa_1 = \kappa_2$ .*

*Todistus.* Lemman 20 mukaisesti voidaan kirjoittaa  $C = Q \exp(E(\lambda))Q^{-1}$ . Nyt voidaan käyttää kuvausta  $Q^{-1}$  pakkaan  $P(C, R_0)$ , jolloin se muuttuu

isometrisesti pakaksi  $P(\exp(E(\lambda)))$ . Pakka voidaan myös normalisoida siten, että Lagrangen taso on esimerkissä 2 annettu standardi Lagrangen taso

$$P(\exp(E(\lambda))) = P(\exp(E(\lambda)), R_{\mathbb{R}}). \quad (6.2)$$

Tämä voidaan perustella teoreeman 19 todistuksen perusteella, jossa Lagrangen tasosta  $R_{\mathbb{R}}$  ja tasosta  $B(R_{\mathbb{R}})$  rakennettiin kuvaus  $\exp(E(\lambda))$ .

Todistetaan pakkojen isometrisyys: Olkoon kaksi pakkaa  $P_1$  ja  $P_2$ , joiden kompleksiset pituudet ovat  $\lambda_1 \in D$  ja  $\lambda_2 \in D$ . Tällöin vastaavat roottoriker- toimet ovat  $\kappa_1 = l_1/\theta_1$  ja  $\kappa_2 = l_2/\theta_2$ .

Oletetaan, että  $P_1$  on isometrinen pakkaan  $P_2$ . Pakat ovat isometrisia pakkaan  $P(\exp(E(\lambda_i)))$ ,  $i = 1, 2$ , jolloin oletuksesta seuraa  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Tämä todistaa väitteen  $\kappa_1 = \kappa_2$ .

Todistetaan toinen suunta eli oletetaan, että pätee  $\kappa_1 = \kappa_2$ . Voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} P(\exp(E(\lambda_i))) &= \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \exp(E(\frac{x}{2}\lambda_i))(R_{\mathbb{R}}) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \exp(E(\frac{l_i x}{2}(1 + i\kappa_i)))(R_{\mathbb{R}}) \\ &= \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}} \exp(E(\frac{\xi}{2}(1 + i\kappa_i)))(R_{\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

joka näyttää, että pakat ovat isometriset. □

**Määritelmä 26.** *Määritellään*

$$P_{\kappa} = P(\exp\{E(1 + i\kappa)\}) = \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}} \exp\{\frac{\xi}{2} \cdot E(1 + i\kappa)\}(R_{\mathbb{R}}).$$

*Pakkaa  $P_{\kappa}$  sanotaan standardipakaksi roottorikertoimella  $\kappa$ .*

## 6.3 Pakkakoordinaatit

Tarkoituksena on rakentaa pakkojen kanssa yhteensopivat koordinaatit kompleksiselle hyperboliselle avaruudelle ja sen reunalle. Konstruktio tehdään jälleen Siegelin alueessa. Käytetään samaa normalisointia kuin Plattis [8].

Aikaisemmin esiteltyä standardia reaalista Lagrangen tasoa  $R_{\mathbb{R}}$  vastaava inversio on  $\iota : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ . Konstruoidaan standardipakalle eksplisiittinen esitys määritelmästä 26. Inversio  $\iota$  pitää paikallaan vektoria  $(z, t, \bar{z})$ ,  $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  vastaavan Lagrangen tason. Projisoimalla saadaan

$(e^{i\psi}, \frac{t}{r_z} e^{i\psi/2}, 1)$ , jossa  $z = r_z e^{i\psi/2}$ . Tällöin Siegelin alueen ehdosta  $\operatorname{Re} z + t^2 \leq 0$  saadaan

$$\left| \frac{t}{r_z} \right|^2 \leq -2 \cos(\psi), \quad \psi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left| \frac{t}{r_z} \right| \leq -i\sqrt{2 \cos(\psi)}, \quad \psi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

Määritellään funktio

$$r(z, t) = \frac{\frac{t}{r_z}}{-i\sqrt{2 \cos(\psi)}},$$

jolloin koordinaattimuunnoksen  $\psi \rightarrow \psi - \pi$  avulla saadaan Lagrangen taso normalisoitua muotoon

$$R_{\mathbb{R}} = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} e^{i\psi} \\ ir\sqrt{2 \cos(\psi)} e^{i\psi/2} \\ 1 \end{pmatrix} \in V_- \cup V_0 : (\psi, r) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [-1, 1] \right\}.$$

jossa reunalle  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  kuuluva joukko saadaan sijoituksella  $r = \pm 1$ . Nähdään, että määrittelemällä funktion  $r$ , menetimme päätepisteet kulman  $\psi$  määrittelyjoukosta. Tämä ei kuitenkaan vaikuta tulokseen, koska  $t = 0$  antaa kaikki reunan pisteet.

Rakennetaan Lagrangen tasolla  $R_{\mathbb{R}}$  eksplisiittinen esitys standardipakalle  $P_{\kappa}$ .

**Propositio 27.** *Olko  $P_{\kappa}$  standardi pakka roottori kertoimella  $\kappa$ . Pakan  $P_{\kappa}$  lauseke on*

$$P_{\kappa} = \{(-e^{\xi+i\psi}, ire^{\psi/2+i(\psi-3\kappa\xi)/2} \sqrt{2 \cos(\psi)}) \in \mathbb{C}^2\} \quad (6.3)$$

*Todistus.* Sovelletaan määritelmää 26 suoraviivaisesti. Lasketaan miten lok-sodrominen kuvaus  $\exp\{\frac{\xi}{2} \cdot E(1+i\kappa)\}$  toimii Lagrangen tasoon  $R_{\mathbb{R}}$ . Saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \exp\{E(1+i\kappa)\}(R_{\mathbb{R}}) &= \begin{pmatrix} e^{(1+i\kappa)\xi/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\kappa\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-1+i\kappa)\xi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi} \\ ir\sqrt{2 \cos(\psi)} e^{i\psi/2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{(1+i\kappa)\xi/2+i\psi} \\ ir\sqrt{2 \cos(\psi)} e^{i(\psi/2-\kappa\xi)} \\ e^{(-1+i\kappa)\xi/2} \end{pmatrix} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \begin{pmatrix} -e^{\xi+i\psi} \\ ir\sqrt{2 \cos(\psi)} e^{\xi/2+i(\psi-3\kappa\xi)/2} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

joka todistaa väitteen.  $\square$

Bisektoreille on olemassa sylinterikoordinaatit [3], joissa standardibisektori on yhden koordinaatin nollajoukko. Tässä tehdään vastaava rakennelma käyttäen lähtökohtana standardipakkaa siten, että yhden koordinaatin nollajoukko on tasainen standardipakka  $P_0$ .

**Teoreema 28.** *Määritellään alueet*

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}, \\ \bar{I}_\psi &= \left\{ \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}, \\ \mathfrak{C} &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid w = \xi + i\psi \in \mathbb{R} \times \bar{I}_\psi, z = u + iv \in \bar{B}\}.\end{aligned}$$

*Kuvaus*

$$\Gamma : \mathfrak{C} \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \partial\mathfrak{H} \cup \mathfrak{H} \quad (6.4)$$

$$\Gamma(\xi, \psi, u, v) = (-e^{\xi+i\psi}, (u+iv)\sqrt{2\cos(\psi)}e^{(\xi 0i\psi)/2}) \quad (6.5)$$

on bijektiivinen ja differentioituva kuvaus, jolla on differentioituva käänteiskuvaus.

*Todistus.* Kuva  $\Gamma(\xi, \psi, u, v)$  kuuluu selvästi aina Siegelin alueeseen. Todistetaan surjektiivisuus. Merkitään Siegelin alueen pistettä  $(z_1, z_2)$ . Parametri  $z_1$  saadaan valitsemalla  $\xi$  ja  $\psi$  oikein. Nyt sopivat  $u$  ja  $v$  saadaan ehdosta  $u + iv = z_2(\sqrt{2\cos(\psi)}e^{(\xi 0i\psi)/2})^{-1}$ .

Todistetaan injektiivisyys. Oletetaan  $\Gamma(p) = \Gamma(p')$ . Suoraan saadaan  $\xi = \xi'$  ja  $\psi = \psi'$ , josta seuraa suoraan  $u + iv = u' + iv'$ , joka todistaa bijektiivisyyden. Todistetaan differentioituvuus laskemalla Jacobin determinantti

$$J = 2e^{3\xi} \cos(\psi),$$

joka on positiivinen jokaisessa alueen  $\mathfrak{C}$  pisteessä. □

Lopulliset sylinterikoordinaatit saadaan asettamalla  $z = ire^{-3i\eta}$ ,  $r \in (0, 1)$ , vertaa kohtia (6.4) ja (6.3). Tällöin standardipakan  $P_\kappa$  yhtälöksi saadaan  $\eta = \kappa\xi$ . Tämä muunnos lisää singulariteetin kohtaan  $r = 0$ , jonka alkukuva on kompleksinen suora. Tämä ei kuitenkaan vaikuta koordinaattien käyttökelpoisuuteen.

**Määritelmä 29.** *Sylinterikoordinaatit ovat koordinaatisto kompleksiselle hyperboliselle avaruudelle ja sen reunalle  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Koordinaatit antaa kuvaus*

$$\tilde{\Gamma}(\xi, \psi, r, \eta) = (-e^{\xi+i\psi}, ir\sqrt{2\cos(\psi)}e^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2}). \quad (6.6)$$

## 6.4 Roottorikuvaus

Roottorikerroin estää pakkojen isometrisyyttä, mutta löytyykö toisenlaisia kuvauksia, jotka siirtävät pakkoja toisikseen. Vastaus on kyllä ja näillä kuvauksilla on kiinnostavia ominaisuuksia. Määritellään roottorikuvaus, joka toimii pakkoihin muuttamalla niiden ominaista roottorikerrointa.

**Lemma 30.** *Olkoon  $P_\kappa$  standardipakka roottorikertoimella  $\kappa$ . Olkoon  $F_\kappa : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  kuvaus*

$$F_\kappa(\xi, \psi, r, \eta) = (\xi, \arctan(\tan(\psi) - 3\kappa), r, \eta + \kappa\xi).$$

*Kuvaus  $F_\kappa$  siirtää tasaisen pakan  $P_0$  pakaksi  $P_\kappa$ .*

*Todistus.* Kirjoitetaan

$$F_\kappa(\xi, \psi, r, 0) = (\xi, \arctan(\tan(\psi) - 3\kappa), r, \kappa\xi),$$

ja koska pakan määrittää muuttujasta  $\psi$  riippumaton ehto, niin väite seuraa.  $\square$

Seuraava roottorikuvauksen ominaisuus on todistettu Plattiksen paperissa [8].

**Lemma 31.** *Kuvaus  $F_\kappa$  on symplektomorfismi.*

Tämä käytännössä tarkoittaa, että kuvaus degeneroituu reunalla kontaktikuvaukseksi. Varmistamme tämän seuraavassa luvussa.

## Luku 7

# Logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä

Pakkakoordinaatit antavat mahdollisuuden tutkia Heisenbergin avaruutta pakkajien indusoimien koordinaattien kautta. Pakkakoordinaattien vaikutus Heisenbergin avaruudessa nähdään käyttämällä Siegelin alueen reunapisteiden parametrisaatiota (5.1).

Muistetaan, että äärelliset reunapistet voidaan parametrisoida asettamalla

$$p = (-|z|^2 + it, \sqrt{2}z, 1), \quad (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

Pakkakoordinaateissa (6.6) reuna saadaan asettamalla  $r = 1$ . Tämän perusteella äärellinen reunapiste voidaan kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} -e^{\xi+i\psi} \\ ir e^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2} \sqrt{2 \cos(\psi)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan mitä tämä on Heisenbergin koordinaateissa  $(z, t)$  ja saadaan

$$\begin{aligned} z &= i e^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2} \sqrt{\cos(\psi)} \\ -|z|^2 &= -\cos(\psi) e^{\xi}, \end{aligned}$$

josta saadaan koordinaatille  $t$  lauseke

$$\begin{aligned} -e^{\xi}(\cos(\psi) + i \sin(\psi)) &= -\cos(\psi) r^2 e^{\xi} + it \\ t &= -e^{\xi} \sin(\psi). \end{aligned}$$

Nämä ovat pakkakoordinaateista johdetut logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä.



**Määritelmä 32.** *Logaritmiset koordinaatit Heisenbergin ryhmässä antaa kuvaus*

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, \psi, \eta) &= (ie^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2}\sqrt{\cos(\psi)}, -e^{\xi}\sin(\psi)) = (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \\ \xi &\in \mathbb{R}, \quad \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \eta \in (-\frac{2\pi}{3}, 0).\end{aligned}$$

Nämä koordinaatit voidaan helposti laajentaa myös kompleksiseen hyperboliseen avaruuteen  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  horopallokoordinaattien avulla [5].

## 7.1 Logaritmisten koordinaattien ominaisuuksia

Tutkitaan joitakin logaritmisten koordinaattien ominaisuuksia. Heisenbergin ryhmän yhdenmuotoisuuskuvaukset, lukuunottamatta itse ryhmäoperaatioita, saavat logaritmisissa koordinaateissa yksinkertaisen muodon.

**Lemma 33.** *Kuvaus  $\tilde{a}_s$  on logaritmisissa koordinaateissa*

$$\tilde{a}_s : (\xi, \psi, \eta) \mapsto (\xi - 2s, \psi, \eta).$$

*Kuvaus  $\tilde{m}_{\theta}$  on logaritmisissa koordinaateissa*

$$m_{\theta} : (\xi, \psi, \eta) \mapsto (\xi, \psi, \eta + \frac{2}{3}\theta).$$

*Inversio  $\tilde{j}$  on logaritmisissa koordinaateissa*

$$j : (\xi, \psi, \eta) \mapsto (-\xi, -\psi, -\eta).$$

*Todistus.* Todistus on suoraviivainen. Kuvaukset saadaan logaritmisissa koordinaateissa konjugoimalla. Kuvaukselle  $\tilde{a}_s$  saadaan

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} \circ \tilde{a}_s \circ \Phi &= \Phi^{-1}(e^{-s}ie^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2}\sqrt{\cos(\psi)}, -e^{-2s}e^{\xi}\sin(\psi)) \\ &= \Phi^{-1}(ie^{(\xi-2s)/2+i(\psi-3\eta)/2}\sqrt{\cos(\psi)}, -e^{(\xi-2s)}\sin(\psi)) \\ &= (\xi - 2s, \psi, \eta).\end{aligned}$$

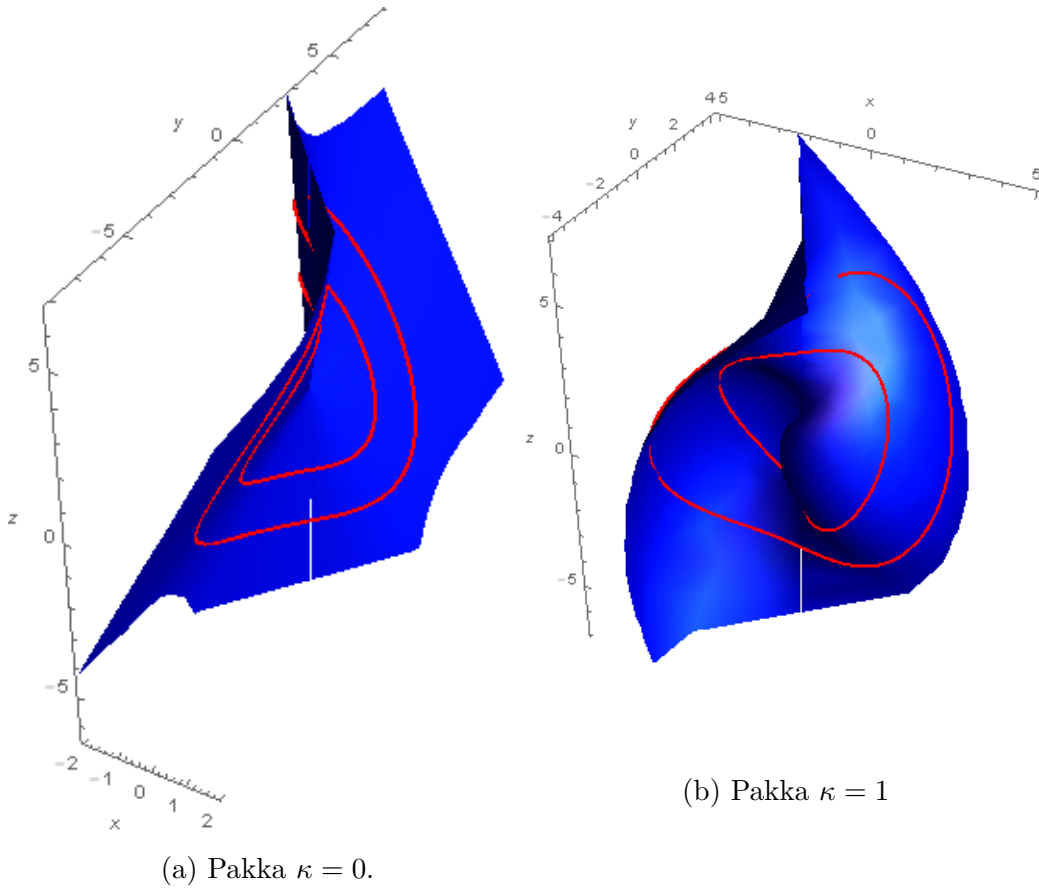
Vastaavasti kuvaukselle  $\tilde{m}_{\theta}$  saadaan

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} \circ \tilde{m}_{\theta} \circ \Phi &= \Phi^{-1}(e^{-i\theta}ie^{\xi/2+i(\psi-3\eta)/2}\sqrt{\cos(\psi)}, -e^{\xi}\sin(\psi)) \\ &= \Phi^{-1}(ie^{\xi/2+i(\psi-3(\eta+\frac{2}{3}\theta))/2}\sqrt{\cos(\psi)}, -e^{\xi}\sin(\psi)) \\ &= (\xi, \psi, \eta + \frac{2}{3}\theta).\end{aligned}$$

Inversio saadaan samanlaisella laskulla. □

Loksodromiset kuvaukset saavat siis yksinkertaisen muodon logaritmisissa koordinaateissa. Luetellaan seuraavaksi logaritmisten koordinaattien geometrisia ominaisuuksia.

1. Lagrangen tason  $R_{\mathbb{R}}$  reuna on standardi  $\mathbb{R}$ -ympyrä ja se on muotoa  $(0, \psi, 0)$ ,  $\psi \in \mathbb{R}$ .
2. Heisenbergin yksikköpallo saadaan asettamalla  $\xi = 0$ . Tämän voi nähdä kahdelle eri tavalla: suoraan  $\|(0, \psi, \eta)\| = e^0 = 1$  tai siten, että standardi  $\mathbb{R}$ -ympyrää kierretään kuvauksella  $\tilde{m}_{\theta}$  toisiksi  $\mathbb{R}$ -ympyröiksi, jotka folioivat yksikköpallon. Dilaatio  $\delta$  antaa erikokoisia origokeskisiä palloja.
3. Tasaisen pakan  $P_0$  reuna saadaan asettamalla  $\eta = 0$  ja pakan  $P_{\kappa}$  reuna saadaan asettamalla  $\eta = \kappa\xi$ .
4. Standardin bisektorin reuna saadaan asettamalla  $\psi = 0$ .



Kuva 7.1: Pakkojen  $\kappa = 1$  ja  $\kappa = 0$  reunat havainnollistettuna Heisenbergin ryhmässä. Punaiset käyrät ovat  $\mathbb{R}$ -ympyröitä.

Mikään ei estä jatkamasta logaritmisiä koordinaatteja siten, että  $\eta \in \mathbb{R}$ . Jos tämä jatko tehdään, niin pitää tarkistaa ehdot, millä peiteavaruudessa  $\mathbb{R} \times (\frac{\psi}{2}, \frac{\psi}{2}) \times \mathbb{R}$  määritelty funktio antaa hyvin määritellyn funktion Heisenbergin ryhmässä [2]. Kuvaus voidaan jatkaa analyttisesti myös koordinaatin  $\psi$  suunnassa.

## 7.2 Kontaktikuvaukset logaritmisissa koordinaateissa

Katsotaan seuraavaksi, miten 1-muodot muuttuvat logaritmisissa koordinaateissa. Merkitään  $z = x + iy$  ja lasketaan

$$\begin{aligned}\Phi^* dx &= d(x \circ \Phi) \\ &= \frac{1}{2}x(\xi, \psi, \eta)d\xi + \frac{3}{2}y(\xi, \psi, \eta)d\eta - \left(\frac{\sin(\psi)}{2\cos(\psi)}(x(\xi, \psi, \eta)) + \frac{1}{2}y(\xi, \psi, \eta)\right)d\psi \\ \Phi^* dy &= \frac{1}{2}y(\xi, \psi, \eta)d\xi - \frac{3}{2}x(\xi, \psi, \eta)d\eta - \left(\frac{\sin(\psi)}{2\cos(\psi)}y(\xi, \psi, \eta) + \frac{1}{2}x(\xi, \psi, \eta)\right)d\psi \\ \Phi^* dt &= -e^\xi(\sin(\psi)d\xi + \cos(\psi)d\eta).\end{aligned}$$

Kontaktimuoto (5.2) logaritmisissa koordinaateissa on siis

$$\begin{aligned}\Phi^* \omega &= -e^\xi \sin(\psi)d\xi - 3xyd\eta \\ &= -e^\xi(\sin(\psi)d\xi + 3\cos(\psi)d\eta).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Etsitään ehdot, joilla kuvaus on kontaktikuvaus Heisenbergin ryhmässä. Merkitään tästä eteenpäin osittaisderivaattoja lyhennemerkinnällä  $\frac{\partial}{\partial \xi} = \partial_\xi$ . Olkoon kuvaus

$$\begin{aligned}f : H &\longrightarrow H, \\ f(\xi, \psi, \eta) &\mapsto (f_1(\xi, \psi, \eta), f_2(\xi, \psi, \eta), f_3(\xi, \psi, \eta))\end{aligned}$$

ja olkoon  $\lambda$  skalaarifunktio siten, että  $f$  on kontaktikuvaus eli pätee  $f^*\omega = \lambda\omega$ . Laskemalla  $f^*\omega = \lambda\omega$  saadaan ehdot

$$e^{f_1}(\sin(f_2)\partial_\xi f_1 + 3\cos(f_2)\partial_\xi f_3) = \lambda e^\xi \sin(\psi),\tag{7.2}$$

$$e^{f_1}(\sin(f_2)\partial_\psi f_1 + 3\cos(f_2)\partial_\psi f_3) = 0,\tag{7.3}$$

$$e^{f_1}(\sin(f_2)\partial_\eta f_1 + 3\cos(f_2)\partial_\eta f_3) = \lambda 3e^\xi \cos(\psi).\tag{7.4}$$

Jos nämä ehdot pätevät niin myös seuraavat yhtälöt ovat totta. Toisesta yhtälöstä (7.3) saadaan ehto

$$\tan(f_2)\partial_\psi f_1 + 3\partial_\psi f_3 = 0,\tag{7.5}$$

ja kolmannelle ehdosta (7.4) voidaan ratkaista  $\lambda$  ja sijoittaa se ensimmäiseen ehtoon (7.2)

$$\left(\partial_\xi - \frac{\tan(\psi)}{3}\partial_\eta\right)f_2 + \frac{1}{3}\tan(f_2) \cdot \left(\partial_\xi - \frac{\tan(\psi)}{3}\partial_\eta\right)f_1 = 0.\tag{7.6}$$

### 7.3 Roottorikuvaus kontaktikuvauksena

Todistetaan, että lemmassa 30 esitelty roottorikuvaus on kontaktikuvaus Heisenbergin ryhmässä. Otetaan hypoteesiksi, että funktio  $\lambda$  on muotoa

$$\lambda(\psi) = \frac{1}{3\kappa + 1 - \sin^2(\psi)},$$

ja näytetään, että ehdot (7.2) - (7.4) ovat voimassa. Ehdon (7.2) vasemmasta puolesta saadaan lauseke

$$\begin{aligned} & e^\xi (\sin(\arctan(\tan(\psi) - 3\kappa)) + 3\kappa \cos(\arctan(\tan(\psi) - 3\kappa))) \\ = & \frac{e^\xi (\tan(\psi) - 3\kappa + 3\kappa)}{\sqrt{3\kappa + 1 - \tan^2(\psi)}} = \frac{e^\xi \sin(\psi)}{\sqrt{3\kappa + 1 - \sin^2(\psi)}} \\ = & e^\xi \lambda \sin(\psi), \end{aligned}$$

joka täsmää ehdon (7.2) oikean puolen kanssa valitulla funktiolla  $\lambda$ .

Toinen ehto (7.3) pätee koska osittaisderivaat ovat  $\partial_\psi f_1 = 0$  ja  $\partial_\psi f_3 = 0$ .

Kolmas ehto (7.4) on samanlainen kuin ensimmäinen. Ehdon vasen puoli on

$$\begin{aligned} & 3e^\xi \cos(\arctan(\tan(\psi) - 3\kappa)) = \frac{e^\xi}{\sqrt{3\kappa + 1 - \tan^2(\psi)}} \\ = & \frac{e^\xi \cos(\psi)}{\sqrt{3\kappa + 1 - \sin^2(\psi)}} = e^\xi \lambda \cos(\psi), \end{aligned}$$

joka täsmää oikean puolen kanssa.

Kaikki kolme ehtoa pätevät, joten roottorikuvaus on kontaktikuvaus.

### 7.4 Radiaalinen venytys

Mallin radiaaliselle venytyskuvaukselle antaa tasossa käsitelty venytys  $z \mapsto z|z|^{k-1}$ . Yritetään rakentaa samanlaista kuvausta Heisenbergin ryhmässä ja vaaditaan, että tämä kuvaus on kontaktikuvaus. Ensimmäinen arvaus vastaavalle kuvaukselle logaritmisissa koordinaateissa on  $(\xi, \psi, \eta) \mapsto (k\xi, \psi, \eta)$ , joka ei kuitenkaan ole kontaktikuvaus. Tämä on kuitenkin hyvä lähtökoh- ta, sillä voimme muokata tästä kuvauksesta kontaktin kuitenkin säilyttäen radiaalisen venytyksen  $\xi \mapsto k\xi$ .

Rakennetaan venytyskuvaus. Merkitään venytyskuvausta

$$f_k(\xi, \psi, \eta) = ((f_k)_1(\xi, \psi, \eta), (f_k)_2(\xi, \psi, \eta), (f_k)_3(\xi, \psi, \eta)),$$

jossa  $k$  on radiaalisen venytyksen koko eli pätee  $(f_k)_1(\xi, \psi, \eta) = k\xi$ . Nyt voidaan käyttää ehtoja kuvauksen kontaktiudelle (7.2)-(7.6).

Tästä saadaan heti  $\partial_\psi(f_k)_3 = 0$ , jolloin  $(f_k)_3$  ei riipu muuttujasta  $\psi$ . Ehdosta (7.6) saadaan lauseke

$$\begin{aligned} (\partial_\xi - \frac{\tan(\psi)}{3}\partial_\eta)(f_k)_2 + \frac{1}{3}\tan((f_k)_2) \cdot (\partial_\xi - \frac{\tan(\psi)}{3}\partial_\eta)(f_k)_1 &= 0 \\ 3\partial_\xi(f_k)_3 - \tan(\psi)\partial_\eta(f_k)_3 + k\tan((f_k)_2) &= 0 \\ (f_k)_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{\partial_\eta(f_k)_3 \tan(\psi) - 3\partial_\xi(f_k)_1}{k}\right). \end{aligned}$$

Tehdään yksinkertainen valinta  $(f_k)_3(\xi, \eta) = \eta$ , jolloin radiaalisesti venytykseksi saadaan

$$f_k(\xi, \psi, \eta) = (k\xi, \tan^{-1}(\frac{\tan(\psi)}{k}), \eta),$$

joka on kontaktikuvaus konstruktion perusteella.

# Luku 8

## Yhteenveto

Työssä käydään läpi hyperbolisten pakkojen konstruktio kompleksiseen hyperboliseen avaruuteen ja niille sovitettujen koordinaattien sovellus Heisenbergin ryhmään. Näistä molemmista avautuu mielenkiintoisia suuntia.

Esimerkiksi hyperbolisten pakkojen ominaisuuksien tarkempi selvittäminen voisi olla mielenkiinnon kohteena ja niitä onkin tutkittu [8]. Vaikka pakat ovat jossain määrin duaalisia bisektoreihin, niin jo roottorikerroin osoittaa niiden rakenteen olevan huomattavan erilainen. Bisektorit voidaan esimerkiksi laajentaa projektiiviseen avaruuteen, jonka leikkauksena kompleksinen hyperbolinen avaruus on määritelty. Eräs kysymys onkin: voiko pakoille tehdä samanlaisia laajennuksia ja mitkä niiden ominaisuudet ovat suhteessa bisektoreihin.

Malli kvasikonformikuvaukselle kompleksitasossa on  $z \mapsto z|z|^{k-1}$  ja edellisessä kappaleessa esitetty radiaalinen venytys rakennettiin nimenomaan analogiseksi versioksi Heisenbergin ryhmässä. Tämä radiaalinen venytys on kvasikonformaalinen Heisenbergin ryhmässä, koska kontaktikuvauksilla on yhteys kvasikonformikuvauksiin Korányi-Reimannin tulosten [1] kautta. Radiaalista venytystä ja muita logaritmistien koordinaattien avulla määriteltyjä kvasikonformaalisia kuvauksia on tutkittu kattavasti paperissa [2]. Eräs suunta onkin keksiä lisää logaritmistien koordinaattien avulla määriteltyjä kvasikonformaalisia kuvauksia.

# Kirjallisuutta

- [1] A. Korányi and H.M. Reimann. Quasiconformal mappings on the heisenberg group. *Inventiones mathematicae*, 80(2):309–338, 1985.
- [2] Zoltán M. Balogh, Katrin Fässler, and Ioannis D. Platis. Modulus method and radial stretch map in the heisenberg group. 2013.
- [3] W.M. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1999.
- [4] J.R. Parker and I.D. Platis. Open sets of maximal dimension in complex hyperbolic quasi-fuchsian space. *J. Differential Geom.*, 73(2):319–350, 06 2006.
- [5] John Parker. Notes on complex hyperbolic geometry, 2010.
- [6] L. Capogna, D. Danielli, S.D. Pauls, and J. Tyson. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2007.
- [7] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer, 2007.
- [8] Ioannis D. Platis. The geometry of complex hyperbolic packs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 147:205–234, 7 2009.